1. תהי $f:(0,1)\to\mathbb{R}$ פונקציה עולה ממש ורציפה. כמו כן, נתון כי f חיובית (כלומר, לכל x בקטע $(0,1)$, $f(x)>0$).
נגדיר $g(x)=-f(x)$.

(א) הוכיחו כי $g(x)$ שלילית (כלומר, הוכיחו כי לכל x בקטע $(0,1)$, $g(x)<0$).

- לכל x בקטע, $g(x)=-f(x)<0$.

(ב) הוכיחו כי $g(x)$ יורדת ממש. **שימו לב:** לא ניתן להניח ש-g גזירה!

- יהיו $x_1<x_2$ בקטע. נוכיח ש-$g(x_1)>g(x_2)$. אכן:

$$\begin{aligned} g(x_1) &> g(x_2) \\ -f(x_1) &> -f(x_2) \\ f(x_1) &< f(x_2) \end{aligned}$$

והפסוק האחרון נכון מאחר ו-f עולה ממש.

(ג) האם $g(x)$ בהכרח רציפה?

- כן, לפי משפט אריתמטיקה של רציפות.

2. תהי $f:(0,1)\to\mathbb{R}$ פונקציה עולה ממש ורציפה. כמו כן, נתון כי f חיובית (כלומר, לכל x בקטע $(0,1)$, $f(x)>0$).
נגדיר $g(x)=e^{f(x)}$.

(א) הוכיחו כי $g(x)$ חיובית (כלומר, הוכיחו כי לכל x בקטע $(0,1)$, $g(x)>0$).

- תוצאה של פונקציה מעריכית הנה תמיד חיובית.

(ב) הוכיחו כי $g(x)$ עולה ממש. **שימו לב:** לא ניתן להניח ש-g גזירה!

- יהיו $x_1<x_2$ בקטע. נוכיח ש-$g(x_1)<g(x_2)$. אכן:

$$\begin{aligned} g(x_1) &< g(x_2) \\ e^{f(x_1)} &> e^{f(x_2)} \\ f(x_1) &< f(x_2) \end{aligned}$$

והפסוק האחרון נכון מאחר ו-f עולה ממש.

(ג) האם $g(x)$ בהכרח רציפה?

- כן. נוכיח:

$$\lim_{x\to a} g(x)=\lim_{x\to a} e^{f(x)}=e^{f(a)}=g(a)$$

3. תהי $f:(0,1)\to\mathbb{R}$ פונקציה עולה ממש ורציפה. כמו כן, נתון כי f שלילית (כלומר, לכל x בקטע $(0,1)$, $f(x)<0$).
נגדיר $g(x)=e^{f(x)}$.

(א) הוכיחו כי $g(x)$ חיובית (כלומר, הוכיחו כי לכל x בקטע $(0,1)$, $g(x)>0$).

(ב) הוכיחו כי $g(x)$ עולה ממש. **שימו לב:** לא ניתן להניח ש-g גזירה!

(ג) האם $g(x)$ בהכרח רציפה?

- התשובות וההוכחות לשאלה זו זהות לחלוטין לתשובות ולהוכחות בשאלה הקודמת.

4. תהי $f:(0,1)\to\mathbb{R}$ פונקציה עולה ממש ורציפה. כמו כן, נתון כי f שלילית (כלומר, לכל x בקטע $(0,1)$, $f(x)<0$). נגדיר $g(x)=|f(x)|$.

(א) הוכיחו כי $g(x)$ חיובית (כלומר, הוכיחו כי לכל x בקטע $(0,1)$, $g(x)>0$).

- ערך מוחלט של מספר שלילי הנו תמיד חיובי. מאחר ו-$f(x)$ תמיד שלילית, $|f(x)|$ תמיד חיובית.

(ב) הוכיחו כי $g(x)$ יורדת ממש. **שימו לב:** לא ניתן להניח ש-g גזירה!

- יהיו $x_1<x_2$ בקטע. נוכיח ש-$g(x_1)>g(x_1)$. אכן:

$$\begin{aligned} g(x_1) &> g(x_2)\\ |f(x_1)| &> |f(x_2)|\\ -f(x_1) &> -f(x_2)\\ f(x_1) &< f(x_2)\end{aligned}$$

והפסוק האחרון נכון מאחר ו-f עולה ממש.

(ג) האם $g(x)$ בהכרח רציפה?

- כן. נשים לב שנוכל לרשום $g(x)=-f(x)$, ואז הטענה תנבע ממשפט אריתמטיקה של רציפות.

5. תהי $f:[0,1]\to[0,1]$ רציפה ותהי $g:[0,1]\to[0,1]$ רציפה. נניח כי $g(0)=0$ וכי $g(1)=1$. הוכיחו כי קיימת c בקטע $[0,1]$ עבורה $f(c)=g(c)$.

- זוהי וריאציה על ההוכחה של משפט נקודת השבת. נגדיר $h(x)=f(x)-g(x)$, ונשים לב כי

$$\begin{aligned} h(0) &= f(0)-g(0)=f(0)\geq 0\\ h(1) &= f(1)-g(1)=f(1)-1\leq 0\end{aligned}$$

ומכיוון ש-h רציפה (כהפרש של רציפות) נובע ממשפט ערך הביניים שקיימת נקודה c עבורה $h(c)=0$. כלומר:

$$\begin{aligned} f(c)-g(c) &= 0\\ f(c) &= g(c)\end{aligned}$$

כדרוש.

6. מצאו דוגמה לפונקציה שהנה עולה ממש ורציפה, אך שאינה חותכת את ציר ה-x.

- הפונקציה e^x הנה כזו.

7. מצאו דוגמה לפונקציה $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ שהנה עולה ממש, שמקיימת

$$\begin{aligned} \lim_{x\to-\infty} f(x) &= -\infty\\ \lim_{x\to\infty} f(x) &= \infty\end{aligned}$$

אך שאינה חותכת את ציר ה-x.

- הפונקציה

$$f(x)=\begin{cases} x+1 & x\geq 0\\ x-1 & x<0\end{cases}$$

הנה כזו.

8. תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה שמקיימת

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty} f(x) &= -\infty \\ \lim_{x\to\infty} f(x) &= \infty\end{aligned}$$

הוכיחו ש-f חותכת את ציר ה-x בהכרח.

- מכיוון שהגבול שלה ב-∞ הנו ∞, היא חיובית מתישהו. מכיוון שהגבול שלה ב-$-\infty$ הוא $-\infty$, היא שלילית מתישהו. מכיוון שהיא רציפה נובע ממשפט ערך הביניים שיש נקודה שבה היא מתאפסת, כלומר, יש נקודה שבה היא חותכת את ציר ה-x.