1. לכל אחת מן הפונקציות הבאות, קבעו:

I מהו תחום ההגדרה של f?

II מהי התמונה של f?

II האם f זוגית? האם אי-זוגית?

(א)

$$f(x) = e^x + 1$$

- תחום הגדרה: $\mathbb{R}$
- תמונה: $(1, \infty)$ (גבוהה ב-1 מ-e^x)
- אינה זוגית ואינה אי-זוגית, שכן $f(-1) = \frac{1}{e} + 1$ ו-$f(1) = e + 1$

(ב)

$$f(x) = e^{x+1}$$

- תחום הגדרה: $\mathbb{R}$
- תמונה: $(0, \infty)$
- אינה זוגית ואינה אי-זוגית, שכן $f(-1) = 1$ ו-$f(1) = e^2$

(ג)

$$f(x) = e^{-x}$$

- תחום הגדרה: $\mathbb{R}$
- תמונה: $(0, \infty)$
- אינה זוגית ואינה אי-זוגית, שכן $f(-1) = e$ ו-$f(1) = \frac{1}{e}$

(ד)

$$f(x) = e^{-|x|}$$

- תחום הגדרה: $\mathbb{R}$
- תמונה: $(1, \infty)$ (מספיק לראות את תמונתה על האי-שליליים, שכן הפונקציה זוגית)
- זוגית, שכן $f(-x) = e^{-|-x|} = e^{-|x|} = f(x)$

(ה)

$$f(x) = \ln x + 1$$

- תחום הגדרה: $(0, \infty)$
- תמונה: $\mathbb{R}$
- אינה זוגית ואינה אי-זוגית, שכן מוגדרת ב-1 אבל לא ב--1

(ו)

$$f(x) = \ln(x+1)$$

- תחום הגדרה: $(-1, \infty)$
- תמונה: $\mathbb{R}$
- אינה זוגית ואינה אי-זוגית, שכן מוגדרת ב-1 אבל לא ב--1

(ז)

$$f(x) = \ln(-x)$$

- תחום הגדרה: $(-\infty, 0)$
- תמונה: $\mathbb{R}$
- אינה זוגית ואינה אי-זוגית, שכן מוגדרת ב--1 אבל לא ב-1

(ח)

$$f(x) = \ln(|-x|)$$

- תחום הגדרה: $\mathbb{R} \setminus \{0\}$
- תמונה: $\mathbb{R}$
- זוגית, שכן $f(-x) = \ln(|-(-x)|) = \ln(|x|) = \ln(|-x|) = f(x)$

(ט)

$$f(x) = e^{x^2}$$

- תחום הגדרה: $\mathbb{R}$
- תמונה: $(1, \infty)$ (מספיק לראות את תמונתה על האי-שליליים, שכן הפונקציה זוגית)
- זוגית, שכן $f(-x) = e^{(-x)^2} = e^{x^2} = f(x)$

(י)

$$f(x) = (e^x)^2$$

- תחום הגדרה: $\mathbb{R}$
- תמונה: $(0, \infty)$
- אינה זוגית ואינה אי-זוגית, שכן $f(1) = e^2$ ו-$f(-1) = \frac{1}{e^2}$.

(יא)

$$f(x) = \ln(e^x + 1)$$

- תחום הגדרה: $\mathbb{R}$
- תמונה: $(0, \infty)$ (הארגומנט של ה-ln הנו גדול מ-1 וקטן מ-∞, ולכן ה-ln הנו גדול מ-$\ln 1$ וקטן מ-"$\ln \infty$")
- אינה זוגית ואינה אי-זוגית, שכן $f(-1) = \ln\left(\frac{1}{e} + 1\right)$, $f(1) = \ln(e+1)$ (והם לא שווים ולא נגדיים).

(יב)

$$f(x) = \ln\left(e^{|x|} + 1\right)$$

- תחום הגדרה: $\mathbb{R}$
- תמונה: $[\ln 2, \infty)$ (מספיק לראות את תמונתה על האי-שליליים, שכן הפונקציה זוגית; כמו כן, על האי-שליליים, הארגומנט של ה-ln הנו לפחות 2 ופחות מ-∞, ולכן ה-ln הנו לפחות $\ln 2$ ופחות מ-"$\ln \infty$")
- זוגית, שכן $f(-x) = \ln\left(e^{|-x|} + 1\right) = \ln\left(e^{|x|} + 1\right) = f(x)$

2. נגדיר

$$f(x) = x^2 e^{1/x}$$

מהו תחום ההגדרה של f? האם היא זוגית? אי-זוגית? האם היא חד-חד-ערכית?

- תחום הגדרה: $\mathbb{R} \setminus \{0\}$
- אינה זוגית ואינה אי-זוגית, שכן $f(-1) = (-1)^2 e^{-1} = \frac{1}{e}$ ו-$f(1) = 1^2 e^1 = e$
- היא אינה חד-חד-ערכית, אם כי זוהי שאלה מעט קשה. היום, כשאנחנו יודעים גבולות, אפשר להסיק כי

$$\lim_{x \to -\infty} x^2 e^{1/x} = \infty$$
$$\lim_{x \to \infty} x^2 e^{1/x} = \infty$$

ולכן הפונקציה אינה חד-חד-ערכית (ניתן לראות זאת בשרטוט – יש גובה שהפונקציה חותכת פעמיים).

3. נגדיר

$$f\left(x\right)=\frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}$$

מהו תחום ההגדרה של f? האם היא זוגית? אי-זוגית? האם היא חד-חד-ערכית? הוכיחו שהיא חסומה!

- תחום הגדרה: $\mathbb{R}$
- אי-זוגית, שכן

$$f\left(-x\right)=\frac{e^{-x}-e^{x}}{e^{-x}+e^{x}}=-\frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}=-f\left(x\right)$$

- היא חד-חד-ערכית. נוכיח:

$$\begin{aligned}
f\left(x_{1}\right) &= f\left(x_{2}\right)\\
\frac{e^{x_{1}}-e^{-x_{1}}}{e^{x_{1}}+e^{-x_{1}}} &= \frac{e^{x_{2}}-e^{-x_{2}}}{e^{x_{2}}+e^{-x_{2}}}\\
\left(e^{x_{1}}-e^{-x_{1}}\right)\left(e^{x_{2}}+e^{-x_{2}}\right) &= \left(e^{x_{2}}-e^{-x_{2}}\right)\left(e^{x_{1}}+e^{-x_{1}}\right)\\
e^{x_{1}+x_{2}}+e^{x_{1}-x_{2}}-e^{-x_{1}+x_{2}}-e^{-x_{1}-x_{2}} &= e^{x_{1}+x_{2}}+e^{-x_{1}+x_{2}}-e^{x_{1}-x_{2}}-e^{-x_{1}-x_{2}}\\
e^{x_{1}-x_{2}}-e^{-x_{1}+x_{2}} &= e^{-x_{1}+x_{2}}-e^{x_{1}-x_{2}}\\
2e^{x_{1}-x_{2}} &= 2e^{-x_{1}+x_{2}}\\
e^{x_{1}-x_{2}} &= e^{-x_{1}+x_{2}}\\
x_{1}-x_{2} &= -x_{1}+x_{2}\\
2x_{1} &= 2x_{2}\\
x_{1} &= x_{2}
\end{aligned}$$

- נוכיח שהיא חסומה. למעשה, נוכיח שהיא חסומה בין -1 ל-1 (הצבה של כמה מספרים אקראיים גרמה לנו לחשוב כך). אכן:

$$\begin{aligned}
\frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}} &< 1\\
e^{x}-e^{-x} &< e^{x}+e^{-x}\\
0 &< e^{-x}
\end{aligned}$$

והפסוק האחרון הנו פסוק אמת. בדומה מראים שהביטוי גדול מ--1.