1. לכל אחת מן הפונקציות הבאות, קבעו:

I מהי התמונה של f?

II האם f מחזורית?

III האם f זוגית? האם אי-זוגית?

(א)

$$f(x) = \sin(x) + 1$$

- התמונה של f הנה $[0, 2]$
- f הנה מחזורית, שכן $f(x+2\pi) = \sin(x+2\pi) + 1 = \sin(x) + 1 = f(x)$
- f אינה זוגית ואינה אי-זוגית, שכן $f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1 + 1 = 0$ ו-$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 + 1 = 2$

(ב)

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{2}$$

- התמונה של f הנה $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$
- f הנה מחזורית, שכן $f(x+2\pi) = \sin(x+2\pi)/2 = \sin(x)/2 = f(x)$
- f אי-זוגית, שכן $f(-x) = \sin(-x)/2 = -\sin(x)/2 = -f(x)$

(ג)

$$f(x) = \sin(2x)$$

- התמונה של f הנה $[-1, 1]$
- f הנה מחזורית, שכן $f(x+2\pi) = \sin(2x+4\pi) = \sin(2x) = f(x)$
- f אי-זוגית, שכן $f(-x) = \sin(2\cdot(-x)) = \sin(-2x) = -\sin(2x) = -f(x)$

(ד)

$$f(x) = \frac{\sin(2x)}{2}$$

- התמונה של f הנה $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$
- f הנה מחזורית, שכן $f(x+2\pi) = \sin(2x+4\pi)/2 = \sin(2x)/2 = f(x)$
- f אי-זוגית, שכן $f(-x) = \sin(2\cdot(-x))/2 = -\sin(2x)/2 = -f(x)$

(ה)

$$f(x) = \sin(2x) + 1$$

- התמונה של f הנה $[0, 2]$
- f הנה מחזורית, שכן $f(x+2\pi) = \sin(2x+4\pi) + 1 = \sin(2x) + 1 = f(x)$
- f אינה זוגית ואינה אי-זוגית, שכן $f\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1 + 1 = 0$ ו-$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 + 1 = 2$

(ו)

$$f\left(x\right)=\sin\left(2x+1\right)$$

- התמונה של f הנה $\left[-1,1\right]$
- f הנה מחזורית, שכן $f\left(x+2\pi\right)=\sin\left(2x+4\pi+1\right)=\sin\left(2x+1\right)=f\left(x\right)$
- f אינה זוגית ואינה אי-זוגית, שכן $f\left(-\frac{1}{2}\right)=\sin\left(-1+1\right)=0$ ו-$f\left(\frac{1}{2}\right)=\sin 2$

(ז)

$$f\left(x\right)=\frac{\sin\left(x\right)+1}{2}$$

- התמונה של f הנה $\left[0,1\right]$
- f הנה מחזורית, שכן

$$f\left(x+2\pi\right)=\frac{\sin\left(x+2\pi\right)+1}{2}=\frac{\sin\left(x\right)+1}{2}=f\left(x\right)$$

- f אינה זוגית ואינה אי-זוגית, שכן

$$\begin{aligned}f\left(-\frac{\pi}{2}\right) &= \frac{\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)+1}{2}=0\\ f\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)+1}{2}=1\end{aligned}$$

(ח)

$$f\left(x\right)=\frac{\sin\left(2x+1\right)+1}{2}$$

i. התמונה של f הנה $\left[0,1\right]$

- f הנה מחזורית, שכן

$$f\left(x+2\pi\right)=\frac{\sin\left(2x+4\pi+1\right)+1}{2}=\frac{\sin\left(2x+1\right)+1}{2}=f\left(x\right)$$

- f אינה זוגית ואינה אי-זוגית, שכן

$$\begin{aligned}f\left(-\frac{1}{2}\right) &= \frac{\sin\left(0\right)+1}{2}=\frac{1}{2}\\ f\left(\frac{1}{2}\right) &= \frac{\sin\left(2\right)+1}{2}\neq\pm\frac{1}{2}\end{aligned}$$

2. נגדיר
$$f\left(x\right)=\tan\left(\frac{1-x^{2}}{1+x^{2}}\right)$$
כמה נקודות חיתוך יש ל-f עם ציר ה-y?

- בדיוק 1, שכן הפונקציה מוגדרת ב-0 (ערכה שם הנו $\tan 1$).

3. נגדיר
$$f\left(x\right)=e\sin\left(\pi x+1\right)$$

(א) האם f מחזורית?

- כן, מאחר ומתקיים

$$\begin{aligned}f\left(x+2\right) &= e\sin\left(\pi\left(x+2\right)+1\right)\\ &= e\sin\left(\pi x+2\pi+1\right)\\ &= e\sin\left(\pi x+1\right)=f\left(x\right)\end{aligned}$$

(ב) מהי התמונה של f?

- התמונה הנה $[-e,e]$

4. נגדיר
$$f\left(x\right)=\frac{\tan\left(x+1\right)}{\sin x}$$

(א) מהו תחום ההגדרה של f?

- צריך לדרוש שני דברים. ראשית, שהארגומנט של $\tan$ יהיה שונה מ-$\frac{\pi}{2}+\pi k$, ושנית, שה-$\sin$ במכנה לא יתאפס. לשם כך, יש לפתור את שני האי-שוויונים הבאים:

$$\begin{aligned}x+1 &\neq \frac{\pi}{2}+\pi k\\ \sin x &\neq 0\end{aligned}$$

הפתרון לאי-השוויון הראשון הנו $x\neq\frac{\pi}{2}-1+\pi k$ והפתרון לאי-השוויון השני הנו $x\neq\pi k$

(ב) האם f מחזורית?

- כן, מאחר ומתקיים

$$\begin{aligned}f\left(x+2\pi\right) &= \frac{\tan\left(x+2\pi+1\right)}{\sin\left(x+2\pi\right)}\\ &= \frac{\tan\left(x+1\right)}{\sin x}=f\left(x\right)\end{aligned}$$

(ג) האם f זוגית? האם אי-זוגית?

- היא אינה זוגית ואינה אי-זוגית, שכן

$$f\left(-\left(\frac{\pi}{2}-1\right)\right)=\frac{\tan\left(-\frac{\pi}{2}+2\right)}{\sin\left(-\frac{\pi}{2}+1\right)}$$

אבל הפונקציה כלל אינה מוגדרת ב-$\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$.

5. נגדיר

$$f(x)=\cos\left(\frac{\pi}{|x|+1}\right)$$

(א) מהו תחום ההגדרה של f?

- תחום ההגדרה: $\mathbb{R}$

(ב) האם f זוגית? האם אי-זוגית?

- זוגית, שכן

$$f(-x)=\cos\left(\frac{\pi}{|-x|+1}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{|x|+1}\right)=f(x)$$

(ג) כמה נקודות חיתוך יש ל-f עם ציר ה-y?

- אחת בדיוק, שכן f מוגדרת ב-0 (ערכה שם $\cos\pi=-1$).