מבוא לתורת הקבוצות – תרגיל 1 – הערות

1. נניח כי המשפטים הבאים מתוארים על ידי הפסוקים האטומיים הנתונים:

   - p – **יורד גשם**
   - q – **הכניסה לשרייבר מלאה בוץ**
   - r – **הדשא רטוב**
   - s – **יש לי חום**

   הצרינו את הטענות הבאות בעזרת הקשרים $\neg, \to, \leftrightarrow, \vee, \wedge$ בלבד:

   (א) אם יורד גשם, הכניסה לשרייבר מלאה בוץ והדשא רטוב.

   - $p \to (q \wedge r)$

   (ב) אם יורד גשם והדשא רטוב, אז הכניסה לשרייבר מלאה בוץ אם ורק אם יש לי חום.

   - $(p \wedge r) \to (q \leftrightarrow s)$

   (ג) או שיורד גשם, או שאם הדשא רטוב או שהכניסה לשרייבר מלאה בוץ, אז אין לי חום.

   - $p \vee ((r \vee q) \to (\neg s))$

2. בכניסה לבניין שרייבר אתם פוגשים בזוג אנשים: פלוני ואלמוני. ידוע לכם כי כל אחד מהם דובר רק אמת או רק שקר. פלוני ניגש אליכם ומצהיר בפניכם – **לפחות אחד מאיתנו שקרן**. נגדיר את הפסוקים הבאים:

   p – פלוני דובר אמת.

   q – אלמוני דובר אמת.

   ההצרנה של המשפט של פלוני הנה $(\neg p) \vee (\neg q)$. נשים לב כי אם פלוני דובר אמת, הפסוק $p \wedge ((\neg p) \vee (\neg q))$ יקבל ערך אמת, ואם פלוני דובר שקר, הפסוק $(\neg p) \wedge (\neg ((\neg p) \vee (\neg q)))$ יקבל ערך אמת. קל לראות שהפסוק השני הנו סתירה (אמתו זאת!), לכן רק הפסוק הראשון יכול להיות נכון. ואכן, הוא אינו סתירה; וכדי שיהיה אמת, צריך להתקיים ש־$\neg q$ הנו אמת, כלומר ש־q הנו שקר. נסיק במקרה זה כי פלוני דובר אמת ואלמוני שקרן.

   בצעו אנליזה דומה במקרה שבו ההצהרה של פלוני בפניכם היא כל אחת מן הבאות (פתרו כל סעיף בנפרד), והסיקו בכל אחד מן המקרים עבור כל אחד מן השניים האם הוא דובר אמת או שקר.

   (א) **זה לא נכון שאחד מאיתנו לפחות דובר אמת.**

   (ב) **אם אני דובר אמת אז גם אלמוני דובר אמת.**

   (ג) **אם בדיוק אחד מאיתנו שקרן, אז זה אני.**

   פתרון למשפט השלישי אם פלוני אומר אמת, אז הטענה

   $$((p \wedge (\neg q)) \vee ((\neg p) \wedge q)) \to (\neg p)$$

   נכונה. כדי שטענה זו תהיה נכונה, בהנתן ש־p אמת (ולכן $(\neg p)$ שקר), דרוש כי הרישא:

   $$(p \wedge (\neg q)) \vee ((\neg p) \wedge q)$$

תקבל ערך שקר. הרישא מקבלת שקר אם ורק אם $p \wedge (\neg q)$ מקבלת ערך שקר (ולכן $\neg q$ מקבלת ערך שקר, כלומר q מקבלת ערך אמת) וגם $((\neg p) \wedge q)$ מקבלת ערך שקר (מה שקורה בכל מקרה). כלומר, המצב האפשרי היחיד הנו ששניהם דוברים אמת.

לעומת זאת, אם נניח שפלוני משקר, אז הטענה

$$((p \wedge (\neg q)) \vee ((\neg p) \wedge q)) \to (\neg p)$$

שקרית. אך לא ייתכן שהיא שקרית, שכן הסיפא $(\neg p)$ אמיתית. לכן לא ייתכן שפלוני משקר.

לסיכום: פלוני ואלמוני דוברים אמת.

3. מבין הפסוקים הבאים, מצאו את הטאוטולוגיות והסתירות:

(א) $(\neg (p \to q)) \to (p \to (\neg q))$

(ב) $(\neg (p \to q)) \leftrightarrow (p \to (\neg q))$

(ג) $(((\neg p) \vee (\neg q)) \wedge (\neg r)) \to (p \leftrightarrow q)$

(ד) $r \to (p \to (q \to p))$

פתרון ניתן למצוא אותן ישירות באמצעות טבלאות אמת.

4. נניח כי $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ הנן טאוטולוגיות ו־$\alpha_{m+1}, \dots, \alpha_{m+n}$ הנן סתירות. נסמן $k = m + n$, ויהי γ פסוק שהפסוקים האטומיים המופיעים בו הם מבין $p_1, \dots, p_k$. נסמן ב־γ' את הפסוק המתקבל מ־γ על ידי החלפת כל מופע של פסוק אטומי p_i בפסוק α_i.

(א) הסבירו מדוע γ' הנו אכן פסוק.

הסבר ההגדרה של פסוק הנה אינדוקטיבית; קל לראות מההגדרה שהחלפת פסוק (אטומי, או לא) בפסוק (אטומי, או לא) לא תשנה את מעמדו של הביטוי כפסוק.

(ב) הוכיחו כי γ' הנו בהכרח טאוטולוגיה או סתירה.

הסבר נבנה את טבלת האמת של γ; נביט בשורה שבה מוצב ב־p_i ערך האמת T אם ורק אם α_i הנה טאוטולוגיה. בשורה זו ערך האמת של γ הנו v כלשהו ($v \in \{T, F\}$). עתה נביט בטבלת האמת של γ'; ללא קשר למצב העניינים (ההצבה לפסוקים היסודיים של γ'), ערך האמת של כל α_i הנו T אם ורק אם α_i הנו טאוטולוגיה, ולכן ערך האמת של γ' יהיה, ללא קשר למצב העניינים, ערך האמת של γ בשורה האמורה, ולכן קבוע. משמע: γ' הנה סתירה או טאוטולוגיה. (הערה: ניתן לתת הסבר פורמלי יותר, אך אין צורך בכך בקורס זה).

5. הוכיחו אחת מבין השקילויות הטאוטולוגיות הבאות, הידועות בשם **כללי דה־מורגן**:

(א) $\neg (p \vee q) \equiv (\neg p) \wedge (\neg q)$

(ב) $\neg (p \wedge q) \equiv (\neg p) \vee (\neg q)$

פתרון ההוכחה הנה באמצעות השוואת כל שורה בטבלאות האמת של הפסוקים משני צידי השקילות.

6. הוכיחו ארבע מבין השקילויות הטאוטולוגיות הבאות:

(א) $p \to q \equiv (\neg q) \to (\neg p)$

(ב) $\neg (\neg p) \equiv p$

(ג) $p \vee q \equiv q \vee p$

(ד) $p \wedge q \equiv q \wedge p$

(ה) $p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$

(ו) $p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$

(ז) $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

(ח) $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

פתרון כנ"ל.

7. מצאו לכל אחד מן הפסוקים הבאים פסוק השקול לו טאוטולוגית, ובו הקשרים $\neg, \vee$ בלבד:

(א) $p \to q$

- מטבלת האמת קל לראות שפסוק זה שקול לפסוק $\neg(p \wedge (\neg q))$. מכלל דה־מורגן נובע כי פסוק זה שקול לפסוק $(\neg p) \vee q$.

(ב) $p \wedge q$

- ברור כי פסוק זה שקול לשלילתו הכפולה, כלומר ל־$\neg(\neg(p \wedge q))$. לפי דה־מורגן, פסוק זה שקול ל־$\neg((\neg p) \vee (\neg q))$.

(ג) $p \leftrightarrow q$

- מטבלת האמת קל לראות שפסוק זה שקול לפסוק $((\neg p) \wedge (\neg q)) \vee (p \wedge q)$. את החלק השמאלי של פסוק זה כבר פענחנו – הוא שקול לפסוק $\neg((\neg p) \vee (\neg q))$. בדומה (או לפי דה־מורגן), החלק הימני שקול לפסוק $\neg(p \vee q)$. כך נקבל פסוק שקול מתאים.

8. הוכיחו כי לפסוק $p \to q$ אין פסוק השקול לו טאוטולוגית ובו הקשרים $\wedge, \vee$ בלבד.

הוכחה נניח בשלילה שיש כזה, ונקרא לו α. אפשר להניח שהפסוקים היסודיים היחידים ב־α הנם p, q (למה?). נביט במצב עניינים שבו p, q מקבלים F. אזי: באינדוקציה קל לראות ש־α גם יקבל ערך F, שכן בשום שלב של בנייתו לא יכול להיווצר מצב של T. עם זאת, הפסוק $p \to q$ מקבל T במצב עניינים זה. (הערה: גם כאן ניתן להיות פורמליים יותר, אך אין צורך)