מבוא לתורת הקבוצות – תרגיל 10 – הערות

1. נגדיר את היחס R הבא על $\mathcal{P}(\mathbb{N})$: xRy אם ורק אם $x \subseteq y$ או $y \subseteq x$. האם R הנו יחס סדר חלקי? האם הוא יחס שקילות?

לא ולא. הוא אינו יחס סדר חלקי ואינו יחס שקילות, שכן הוא אינו טרנזיטיבי: בעוד $\{1\} R \{1,2\}$ ו־$\{1,2\} R \{2\}$, לא מתקיים $\{1\} R \{2\}$.

2. יהי R יחס סדר חלקי על a.

(א) הראו כי גם R^{-1} הנו יחס סדר חלקי על a.

רפלקסיביות יהי $x \in a$. אזי: $(x,x) \in R$ ולכן $(x,x) \in R^{-1}$.

טרנזיטיביות נניח כי $(x,y), (y,z) \in R^{-1}$. אזי: $(z,y), (y,x) \in R$. לכן: $(z,x) \in R$, ומכאן $(x,z) \in R^{-1}$.

אנטי־סימטריות חלשה נניח כי $(x,y), (y,x) \in R^{-1}$. אזי: $(x,y), (y,x) \in R$. לכן: $x = y$.

(ב) תהי $b \subseteq a$, ונסמן $S = R \cap (b \times b)$. הראו כי S הנו יחס סדר חלקי על b. ליחס סדר זה נקרא <u>יחס הסדר הנורש</u>.

רפלקסיביות יהי $x \in b$. אזי: $(x,x) \in R$ וגם $(x,x) \in b \times b$ ולכן $(x,x) \in S$.

טרנזיטיביות נניח כי $(x,y), (y,z) \in S$. בפרט: $(x,y), (y,z) \in R$ וגם $x, y, z \in b$. לכן: $(x,z) \in R$ וגם $(x,z) \in b \times b$ ולכן $(x,z) \in S$.

אנטי־סימטריות חלשה נניח כי $(x,y), (y,x) \in S$. בפרט: $(x,y), (y,x) \in R$. לכן $x = y$.

3. תהי $(a,<)$ קבוצה סדורה קווית. הוכיחו כי $(a,<)$ סדורה היטב אם ורק אם אין סדרה אינסופית יורדת (לפי $<$) של איברי a.

כיוון א' נניח כי יש סדרה אינסופית יורדת $\langle x_n \mid n \in \omega \rangle$ של איברים ב־a. נביט בתת הקבוצה $\{x_n \mid n \in \omega\}$. זוהי תת קבוצה של a שאין לה איבר ראשון (שכן לכל איבר בה יש איבר קטן ממנו בקבוצה), בסתירה לכך ש־$<$ סדר טוב על a.

כיוון ב' נניח כי $<$ אינו סדר טוב על a. אז: קיימת ל־a תת קבוצה c שאין לה איבר ראשון. מאחר ואין לה איבר ראשון, היא אינסופית. נבחר $x_0 \in c$. מאחר ו־x_0 אינו איבר ראשון ב־c, קיים $x_1 < x_0$ ב־c. מאחר וגם הוא אינו ראשון, נוכל לבחור $x_2 < x_1$ ב־c. באופן זה נבנה סדרה אינסופית יורדת $\langle x_n \mid n \in \mathbb{N} \rangle \subseteq c$, ומאחר וסדרה זו הנה גם ב־a, נקבל סתירה.

הערה בכיוון ב' השתמשנו באקסיומת הבחירה. איפה?

הגדרה נניח כי $(a, \leq_a)$ ו־$(b, \leq_b)$ הנן קבוצות סדורות חלקית. נגדיר סדר מילוני שמאלי על $a \times b$ באופן הבא: $(x, y) \leq_L (x', y')$ אם ורק אם $x <_a x'$ או ($x = x'$ וגם $y \leq_b y'$).

4. יהיו $(a, \leq_a)$ ו־$(b, \leq_b)$ קבוצות סדורות חלקית, ויהי $\leq_L$ הסדר המילוני השמאלי על $a \times b$.

(א) הוכיחו כי $(a \times b, \leq_L)$ הנה קבוצה סדורה חלקית.

רפלקסיביות יהי $(x, y) \in a \times b$. אזי, $x = x$ וגם $y \leq_b y$ ולכן $(x, y) \leq_L (x, y)$.

טרנזיטיביות נניח כי $(x_1, y_1) \leq_L (x_2, y_2)$ וכי $(x_2, y_2) \leq_L (x_3, y_3)$. נבחין בין מספר מקרים:

מקרה א' $x_1 <_a x_2$. מאחר ובכל מקרה $x_2 \leq_a x_3$ נקבל $x_1 <_a x_3$ וממילא $(x_1, y_1) \leq_L (x_3, y_3)$.

מקרה ב' $x_1 = x_2$ ו־$x_2 <_a x_3$. במקרה זה נקבל שוב $x_1 <_a x_3$ וממילא $(x_1, y_1) \leq_L (x_3, y_3)$.

מקרה ג' $x_1 = x_2$ ו־$x_2 = x_3$. במקרה זה $x_1 = x_3$; מאחר ו־$y_1 \leq_b y_2$ ו־$y_2 \leq_b y_3$ נקבל $y_1 \leq_b y_3$ וממילא $(x_1, y_1) \leq_L (x_3, y_3)$.

אנטי־סימטריות חלשה נניח כי $(x_1, y_1) \leq_L (x_2, y_2)$ וכי $(x_2, y_2) \leq_L (x_1, y_1)$. אם $x_1 <_a x_2$ נקבל ש־$x_2 >_a x_1$ בסתירה להנחה השנייה, ולכן $x_1 = x_2$. בדומה: $y_1 = y_2$.

(ב) הוכיחו/הפריכו: אם $(a, \leq_a)$ ו־$(b, \leq_b)$ סדורות קווית אז $(a \times b, \leq_L)$ סדורה קווית.

הוכחה יהיו $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in a \times b$. a סדורה קווית, ולכן x_1, x_2 ניתנים להשוואה. נניח בלי הגבלת הכלליות כי $x_1 \leq_a x_2$. אם $x_1 <_a x_2$ אז $(x_1, y_1) \leq_L (x_2, y_2)$. אחרת: $x_1 = x_2$. b סדורה קווית, ולכן y_1, y_2 ניתנים להשוואה. אם $y_1 \leq_b y_2$, $(x_1, y_1) \leq_L (x_2, y_2)$. אחרת $y_2 \leq_b y_1$ ולכן $(x_2, y_2) \leq_L (x_1, y_1)$.

(ג) הוכיחו/הפריכו: אם $(a, \leq_a)$ ו־$(b, \leq_b)$ סדורות היטב אז $(a \times b, \leq_L)$ סדורה היטב.

הוכחה אם $(a, \leq_a)$ ו־$(b, \leq_b)$ סדורות היטב אז בפרט הן סדורות קווית ולכן לפי הסעיף הקודם $(a \times b, \leq_L)$ סדורה קווית. נביט ב־$R \subseteq a \times b$ שאינה ריקה; עלינו להראות כי ב־R יש איבר ראשון. נסמן:

$$R_a = \{x \in a \mid \exists y \in b\,((x, y) \in R)\}$$

נשים לב כי $R_a \subseteq a$ ואינה ריקה, ולכן יש לה איבר ראשון m_a. נסמן:

$$R_b = \{y \in b \mid (m_a, y) \in R\}$$

אזי $R_b \subseteq b$ ואינה ריקה, ולכן יש לה איבר ראשון m_b. בפרט: $(m_a, m_b) \in R$. נראה כי איבר זה הנו איבר ראשון ב־R. אכן, יהי $(x, y) \in R$. מהגדרת R_a, $x \in R_a$. מהגדרת m_a, $m_a \leq_a x$. אם $m_a <_a x$, נקבל כי $(m_a, m_b) \leq_L (x, y)$. אחרת $m_a = x$. לכן, מהגדרת R_b, $y \in R_b$. מהגדרת m_b, $m_b \leq_b y$, ולכן $(m_a, m_b) \leq_L (x, y)$.

הגדרה תהי $(a,\leq)$ קבוצה סדורה חלקית. נגדיר סדר מילוני שמאלי על $a^{<\omega}=\bigcup_{n\in\omega}a^n$ באופן הבא: $x\leq_L y$ אם ורק אם מתקיים אחד מן הבאים:

- x הנו תחילית של y (כלומר, אם $|x|=n$ אז $|y|\geq n$ ולכל $k\leq n$, $x(k)=y(k)$).
- קיים k טבעי ראשון עבורו $x(k)\neq y(k)$, ועבורו מתקיים $x(k)<y(k)$.

5. תהי $(a,\leq)$ קבוצה סדורה חלקית, ויהי $\leq_L$ הסדר המילוני השמאלי על $a^{<\omega}$.

(א) הוכיחו כי $(a^{<\omega},\leq_L)$ הנה קבוצה סדורה חלקית.

רפלקסיביות יהי $x\in a^{<\omega}$. אזי: x הנו תחילית של עצמו, ולכן $x\leq_L x$.

טרנזיטיביות נניח כי $x\leq_L y$ וכי $y\leq_L z$. נבחין בין מספר מקרים:

מקרה א' x הנו תחילית של y, y הנו תחילית של z. במקרה זה x הנו תחילית של z ולכן $x\leq_L z$.

מקרה ב' x הנו תחילית של y וקיים k טבעי ראשון עבורו $y_k\neq z_k$, ועבורו מתקיים $y_k<z_k$. אם $k\leq|x|$ אז $x_k=y_k<z_k$ ולכל $m<k$ מתקיים $x_m=y_m=z_m$, ולכן k הנו ראשון עבורו $x_k\neq z_k$, ונקבל ש־$x<_L z$. אחרת $k>|x|$ ולכן x הנו תחילית־ממש של z ושוב $x<_L z$.

מקרה ג' קיים k טבעי ראשון עבורו $x_k\neq y_k$, ועבורו מתקיים $x_k<y_k$, ו־y הנו תחילית של z. בפרט, $x_k<y_k=z_k$, ולכל $m<k$ מתקיים $x_m=y_m=z_m$, ולכן k הנו ראשון עבורו $x_k\neq z_k$, ונקבל ש־$x<_L z$.

מקרה ד' קיים k טבעי ראשון עבורו $x_k\neq y_k$ ועבורו מתקיים $x_k<y_k$, וקיים ℓ טבעי ראשון עבורו $y_\ell\neq z_\ell$ ועבורו מתקיים $y_\ell<z_\ell$.

(ב) הוכיחו/הפריכו: אם $(a,\leq)$ סדורה קווית אז $(a^{<\omega},\leq_L)$ סדורה קווית.

הוכחה יהיו $x,y\in a^{<\omega}$ כלשהם, ועלינו להראות כי הם ניתנים להשוואה. אז, x,y סדרות באורכים $n_x,n_y\in\omega$. יהי $n_0\leq\min\{n_x,n_y\}$ האינדקס המינימלי, אם קיים כזה, עבורו $x_{n_0}\neq y_{n_0}$. אם אכן יש כזה, נשווה את x_{n_0} ל־y_{n_0} (אפשר מכיוון ש־a סדורה קווית). אם $x_{n_0}<y_{n_0}$, אזי $x<_L y$. אם $x_{n_0}>y_{n_0}$, אזי $x>_L y$.
עתה נניח שאין כזה n_0. אם $n_x=n_y$ אזי $x=y$. אם $n_x>n_y$ ינבע כי y הנו תחילית־ממש של x ולכן $y<_L x$. אם $n_x<n_y$, ינבע כי x הנו תחילית־ממש של y ולכן $x<_L y$. לכן, בכל מקרה ניתן להשוותם.

(ג) הוכיחו/הפריכו: אם $(a,\leq)$ סדורה היטב אז $(a^{<\omega},\leq_L)$ סדורה היטב.

הפרכה נבחר $a=2$, ונביט בסדרה הבאה:

$$\begin{aligned}
a_0 &= 1\\
a_1 &= 01\\
a_2 &= 001\\
\vdots & \quad \vdots\\
a_k &= \overbrace{00\ldots0}^{k\text{ times}}1\\
\vdots & \quad \vdots
\end{aligned}$$

אז: $\langle a_n\mid n\in\omega\rangle$ הנה סדרה של איברים ב־$a^{<\omega}$. אבל: בדיקה קצרה תגלה כי לכל $i<j$, $a_i>_L a_j$. כלומר, הסדרה $\langle a_n\rangle$ הנה סדרה אינסופית יורדת. לפי שאלה 3 נסיק כי $(a^{<\omega},\leq_L)$ אינו סדר טוב.

6. תהי $(x, \leq)$ קבוצה סדורה חלקית, ונניח כי הרישא[1] של כל איבר ב־x הנו קבוצה סופית. האם בהכרח $|x| \leq \aleph_0$? ואם $\leq$ הנו סדר קווי: האם בהכרח $|x| \leq \aleph_0$? נמקו!

פתרון לשאלה הראשונה לא. למשל, נוכל לקחת את $\mathbb{R}$ עם הסדר הריק, או עם סדר טריוויאלי אחר (למשל $\prec = \{(1,2)\}$).

פתרון לשאלה השנייה כן. נגדיר $f : x \to \mathbb{N}$ באופן הבא: לכל $a \in x$, $f(a)$ יהיה מספר האיברים ברישא של a (זה ב־$\mathbb{N}$ לפי ההנחה). כלומר: $f(a) = |O(a)|$. נוכיח כי f חד חד ערכית. אכן, יהיו $f(a) = f(b)$. אזי, ל־a ול־b יש אותו מספר איברים ברישא. נניח כי $a \neq b$ ובלי הגבלת הכלליות נניח כי $a < b$. אז: $a \in O(b)$. אבל, לכל $c < a$ מתקיים, מטרנזיטיביות $<$, $c < b$, ולכן $O(a) \subseteq O(b)$. מכאן: $O(a) \subset O(b)$, בסתירה לכך ש־$|O(a)| = |O(b)| < \aleph_0$. לכן $|x| \leq \aleph_0$.

7. מצאו סדר קווי $\preceq$ על $\mathbb{Z}$ כך שלכל $z \in \mathbb{Z}$, הרישא של z (לפי $\preceq$) הנה סופית.

פתרון כל מניה של $\mathbb{Z}$ מגדירה סדר כזה. למשל, המניה:

$$\mathbb{Z} = \{0, -1, 1, -2, 2, \ldots\}$$

8. יהי $n \in \mathbb{N}$.

(א) מצאו סדר קווי $\preceq$ וקבוצה $A \subseteq \mathbb{N}$ מעוצמה n כך שלכל $a \in A$ הרישא של a (לפי $\preceq$) הנה אינסופית, ולכל $b \notin A$ הרישא של b הנה סופית.

פתרון נבחר $A = \{0, \ldots, n-1\}$ ונגדיר על $\mathbb{N}$ את הסדר $\preceq$ הבא – $x \preceq y$ אם ורק מתקיים אחד מן הבאים:

- $x, y \in A$ ומתקיים $x \leq y$ (כאשר $\leq$ הנו הסדר הרגיל על $\mathbb{N}$)
- $x, y \notin A$ ומתקיים $x \leq y$
- $x \notin A$ ו־$y \in A$

(ב) מצאו סדר קווי $\trianglelefteq$ וקבוצה $A \subseteq \mathbb{N}$ מעוצמה n כך שלכל $a \in A$ הרישא של a (לפי $\trianglelefteq$) הנה סופית, ולכל $b \notin A$ הרישא של b הנה אינסופית.

פתרון נבחר $A = \{0, \ldots, n-1\}$ ונגדיר על $\mathbb{N}$ את הסדר $\trianglelefteq$ הבא – $x \trianglelefteq y$ אם ורק אם $y \preceq x$.

הערה השאלה לא הייתה מנוסחת בצורה ברורה מספיק. מתנצל על כך!

[1] תזכורת: הרישא של $a \in x$ מוגדר להיות $O(a) = \{b \in x \mid b < a\}$.