מבוא לתורת הקבוצות - תרגיל 10

להגשה עד ליום רביעי ה־25 בינואר 2012

1. נגדיר את היחס R הבא על $\mathcal{P}(\mathbb{N})$: xRy אם ורק אם $y \subseteq x$ או $x \subseteq y$. האם R הנו יחס סדר חלקי? האם הוא יחס שקילות?

2. יהי R יחס סדר חלקי על a.

(א) הראו כי גם R^{-1} הנו יחס סדר חלקי על a.

(ב) תהי $b \subseteq a$, ונסמן $S = R \cap (b \times b)$. הראו כי S הנו יחס סדר חלקי על b. ליחס סדר זה נקרא <u>יחס הסדר הנורש</u>.

3. תהי $(a, <)$ קבוצה סדורה קווית. הוכיחו כי $(a, <)$ סדורה היטב אם ורק אם אין סדרה אינסופית יורדת (לפי $>$) של איברי a.

הגדרה נניח כי $(a, \leq_a)$ ו־$(b, \leq_b)$ הנן קבוצות סדורות חלקית. נגדיר <u>סדר מילוני שמאלי</u> על $a \times b$ באופן הבא: $(x', y') \leq_L (x, y)$ אם ורק אם $x <_a x'$ או ($x = x'$ וגם $y \leq_b y'$).

4. יהיו $(a, \leq_a)$ ו־$(b, \leq_b)$ קבוצות סדורות חלקית, ויהי $\leq_L$ הסדר המילוני השמאלי על $a \times b$.

(א) הוכיחו כי $(a \times b, \leq_L)$ הנה קבוצה סדורה חלקית.

(ב) הוכיחו/הפריכו: אם $(a, \leq_a)$ ו־$(b, \leq_b)$ סדורות קווית אז $(a \times b, \leq_L)$ סדורה קווית.

(ג) הוכיחו/הפריכו: אם $(a, \leq_a)$ ו־$(b, \leq_b)$ סדורות היטב אז $(a \times b, \leq_L)$ סדורה היטב.

הגדרה תהי $(a, \leq)$ קבוצה סדורה חלקית. נגדיר <u>סדר מילוני שמאלי</u> על $a^{<\omega} = \bigcup_{n \in \omega} a^n$ באופן הבא: $x \leq_L y$ אם ורק אם מתקיים אחד מן הבאים:

- x הנו תחילית של y (כלומר, אם $|x| = n$ אז $|y| \geq n$ ולכל $k \leq n$, $x(k) = y(k)$)
- קיים k טבעי ראשון עבורו $x(k) \neq y(k)$, ועבורו מתקיים $x(k) < y(k)$

5. תהי $(a, \leq)$ קבוצה סדורה חלקית, ויהי $\leq_L$ הסדר המילוני השמאלי על $a^{<\omega}$.

(א) הוכיחו כי $(a^{<\omega}, \leq_L)$ הנה קבוצה סדורה חלקית.

(ב) הוכיחו/הפריכו: אם $(a, \leq)$ סדורה קווית אז $(a^{<\omega}, \leq_L)$ סדורה קווית.

(ג) הוכיחו/הפריכו: אם $(a, \leq)$ סדורה היטב אז $(a^{<\omega}, \leq_L)$ סדורה היטב.

6. תהי $(x, \leq)$ קבוצה סדורה חלקית, ונניח כי הרישא[1] של כל איבר ב־x הנו קבוצה סופית. האם בהכרח $|x| \leq \aleph_0$? ואם $\leq$ הנו סדר קווי: האם בהכרח $|x| \leq \aleph_0$? נמקו!

7. מצאו סדר קווי $\preceq$ על $\mathbb{Z}$ כך שלכל $z \in \mathbb{Z}$, הרישא של z (לפי $\preceq$) הנה סופית.

8. יהי $n \in \mathbb{N}$.

(א) מצאו סדר קווי $\preceq$ וקבוצה $A \subseteq \mathbb{N}$ מעוצמה n כך שלכל $a \in A$ הרישא של a (לפי $\preceq$) הנה אינסופית, ולכל $b \notin A$ הרישא של b הנה סופית.

(ב) מצאו סדר קווי $\trianglelefteq$ וקבוצה $A \subseteq \mathbb{N}$ מעוצמה n כך שלכל $a \in A$ הרישא של a (לפי $\trianglelefteq$) הנה סופית, ולכל $b \notin A$ הרישא של b הנה אינסופית.

[1] תזכורת: הרישא של $a \in x$ מוגדר להיות $O(a) = \{b \in x \mid b < a\}$.