מבוא לתורת הקבוצות – תרגיל 11 – הערות

1. תהי $A \subseteq \mathbb{Z}$ חסומה מלעיל ומלרע. הוכיחו כי A סופית.

הוכחה נסמן חסם עליון כלשהו ב־M וחסם תחתון כלשהו ב־m. אז: ההעתקה $f : A \to M-m+1$ המוגדרת כך:

$$f(z) = z - m$$

הנה חד חד ערכית מ־A למספר טבעי, ולכן A סופית.

2. תהי $A \subseteq \mathbb{Z}$ חסומה מלעיל וסדורה היטב (לפי $\leq$). הוכיחו כי A סופית.

הוכחה מכיוון שהיא סדורה היטב יש לה חסם מלרע. מסעיף 1 נקבל את הדרוש.

3. תהי $(x, \preceq)$ קבוצה סדורה חלקית, ונניח כי קיים איזומורפיזם $f : x \to \mathbb{Z}$ (כאשר $\mathbb{Z}$ מצויידת בסדר הרגיל). תהי $a \subseteq x$ חסומה מלעיל וסדורה היטב (לפי $\preceq$). הוכיחו כי a סופית.

הוכחה נסמן $A = f[a]$. אזי, A סדורה היטב וחסומה מלעיל (למה?) ולפי סעיף 2 היא סופית, ומכאן ש־a סופית.

4. תהי $(x, \leq)$ קבוצה סדורה היטב, ונניח כי גם $(x, \geq)$ סדורה היטב. הוכיחו כי x סופית.

הוכחה נסמן ב־$a_<$ את קבוצת כל האיברים ב־x שיש להם רישא סופית לפי $\leq$, וב־$a_>$ את קבוצת כל האיברים ב־x שיש להם רישא סופית לפי $\geq$. מובן כי אף אחת מן הקבוצות הללו אינה ריקה, שכן לפי כל סדר קיים איבר ראשון, וזה נמצא בקבוצה המתאימה. נניח ראשית כי הקבוצות אינן זרות. יהי $b \in a_< \cap a_>$. אזי, מאחר ו־$\leq$ הנו סדר קווי, כל איבר $\alpha \in x$ מקיים $\alpha \leq b$ או $\alpha \geq b$, ולכן יש ב־x מספר סופי של איברים, כפי שרצינו להוכיח.

לכן נוכל להניח ש־$a_<$ ו־$a_>$ זרות; אך עתה נראה שזה לא ייתכן, שכן $a_< = x$. אחרת, יהי c המינימלי (לפי $\leq$) ב־$x \setminus a_<$. יהי c_1 העוקב המיידי שלו לפי $\geq$ – זהו גם הקודם המיידי שלו לפי $\leq$. לכן, $c_1 \in a_<$. מכאן:

$$O_{\leq}(c) = \{c_1\} \cup O(c_1)$$

ולכן הרישא של c (לפי $\leq$) הנה סופית, וזוהי סתירה – ומכאן נובע הדרוש.

5. נניח כי $(a, \leq_a)$ סדורה היטב ו־$(b, \leq_b)$ סדורה חלקית, וכי $f : a \to b$ הפיכה ושומרת סדר. הוכיחו כי f איזומורפיזם ו־$\leq_b$ סדר טוב על b.[1]

הערה דומה למה שראינו בכיתה.

6. יהיו $(a, \leq_a)$, $(b, \leq_b)$ ו־$(c, \leq_c)$ קבוצות סדורות חלקית, ונניח כי a איזומורפית ל־b ו־b איזומורפית ל־c (ביחס לסדרים המתאימים). הוכיחו כי a איזומורפית ל־c.

הערה נובע מיד מההגדרות (ומכך שהרכבה של הפיכות היא הפיכה, והרכבה של שומרות סדר הנה שומרת סדר).

[1] תוכלו להיעזר במה שהוכחנו בכיתה.

7. יהיו $(a,\leq_a)$, $(b,\leq_b)$ קבוצות סדורות חלקיות איזומורפיות. האם בהכרח $(a,\leq_a)$ איזומורפית ל־$(b,\geq_b)$?

לא. למשל, $\mathbb{N}$ עם הסדר הרגיל איזומורפי ל־$\mathbb{N}$ עם הסדר הרגיל, אבל $\mathbb{N}$ עם הסדר הרגיל אינו איזומורפי ל־$\mathbb{N}$ עם הסדר ההפוך. (למה?)

8. הוכיחו כי $(\mathbb{R},\leq)$ ו־$(\mathbb{R},\geq)$ איזומורפיים.

עדות האיזומורפיזם $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ המוגדר כך: $f(x)=-x$.

9. יהיו $(a,\leq_a)$ ו־$(b,\leq_b)$ קבוצות סדורות חלקית, ויהי $f:a\to b$ איזומורפיזם. הוכיחו כי:

(א) אם ב־a יש איבר מקסימלי ($m\in a$ כך שלכל m $x\geq_a m$, $x=m$), גם ב־b יש איבר מקסימלי.

- $f(m)$ הנו כזה.

(ב) אם ב־a יש איבר אחרון ($\ell\in a$ כך שלכל $x\in a$, $x\leq_a \ell$), גם ב־b יש איבר אחרון.

- $f(\ell)$ הנו כזה.

(ג) אם ב־a יש סדרה אינסופית יורדת (ממש), גם ב־b יש סדרה כזו.

- נניח כי x_n הנה תת סדרה אינסופית יורדת ממש (לפי $\leq_a$). אז: $f(x_n)$ הנה תת סדרה אינסופית יורדת ממש (לפי $\leq_b$).

(ד) אם לכל איבר (שאינו ראשון) ב־a יש קודם מיידי[2], אז גם לכל איבר ב־b (שאינו ראשון) יש קודם מיידי.

- יהי $y\in b$ איבר שאינו ראשון. עלינו להראות כי ל־y יש איבר קודם מיידי. נסמן $x=f^{-1}(y)$. ל־x יש קודם מיידי. נסמן את הקודם של x ב־$p(x)$. נסמן $z=f(p(x))$. אזי: z הנו קודם מיידי של y. נוכיח זאת: ראשית, עלינו להראות כי $z<_b y$. אכן, $p(x)<_a x$ ומשמירת־סדר של f נובע הדרוש. עתה, יהי $z'<_b y$. עלינו להראות כי $z\leq_b z'$. אכן, נסמן $u=f^{-1}(z')$. משמירת־סדר של f^{-1} נובע כי

$$u=f^{-1}(z')<_a f^{-1}(y)=x$$

ולפי ההנחה ש־$p(x)$ הנו קודם מיידי של x נקבל כי $u\leq_a p(x)$, ולכן $f(u)\leq_b f(p(x))$, כלומר $z'\leq_b z$, כדרוש.

(ה) אם a צפוף (כלומר, לכל $x<_a y$ ב־a קיים $z\in a$ עבורו $x<_a z<_a y$) אז גם b צפוף.

- יהיו $x',y'\in b$ עבורם $x'<_b y'$. נסמן $x=f^{-1}(x')$ ו־$y=f^{-1}(y')$. אזי, קיים $z\in a$ עבורו $x<_a z<_a y$. נסמן $z'=f(z)$ ונקבל $x'<_b z'<_b y'$.

(ו) אם הרישא של כל $x\in a$ הנו קבוצה סופית, אז גם הרישא של כל $y\in b$ הנו קבוצה סופית.

- נובע מכך שלכל $y\in b$, $O(y)=f\left[O\left(f^{-1}(y)\right)\right]$.

[2] קודם מיידי של x הנו איבר ש־x הנו העוקב המיידי שלו.

10. הראו כי כל אחד מזוגות הסדרים הבאים <u>אינם</u> איזומורפיים:

(א) $([0,\infty),\leq)$ ו־$((0,\infty),\leq)$
(ב) $(\mathbb{R},\leq)$ ו־$(\mathbb{Q},\leq)$
(ג) $(\mathbb{Z},\leq)$ ו־$(\mathbb{Q},\leq)$
(ד) $(\mathbb{N},\leq)$ ו־$(\mathbb{N},\geq)$
(ה) $(\mathcal{P}(\mathbb{N}),\subseteq)$ ו־$(\mathbb{N},\leq)$
(ו) $(\mathcal{P}(\mathbb{N}),\subseteq)$ ו־$(\mathbb{R},\leq)$
(ז) $\left(\left\{1-\frac{1}{n}\mid n\in\mathbb{N}^+\right\},\leq\right)$ ו־$\left(\left\{1-\frac{1}{n}\mid n\in\mathbb{N}^+\right\}\cup\left\{2-\frac{1}{n}\mid n\in\mathbb{N}^+\right\},\leq\right)$

הוכחות

(א) לקבוצה הראשונה יש איבר ראשון ולשנייה אין.

(ב) הקבוצות אינן מאותה עוצמה.

(ג) הקבוצה השנייה צפופה והראשונה לא.

(ד) לקבוצה הראשונה יש איבר ראשון ולשנייה אין.

(ה) לקבוצה הראשונה יש איבר אחרון ולשנייה אין / הקבוצות אינן מאותה עוצמה.

(ו) לקבוצה הראשונה יש איבר אחרון ולשנייה אין.

(ז) בקבוצה הראשונה יש רק איבר אחד ללא קודם מיידי ובקבוצה השנייה יש שניים כאלה.

11. תהי a קבוצה ותהי $(b,\leq)$ קבוצה סדורה היטב. נניח כי $|a|=|b|$. הוכיחו כי ניתן להגדיר על a סדר טוב.

הערה עשינו זאת בכיתה עם קבוצה בת מניה – ההוכחה במקרה הכללי זהה.

12. תהי $(a,\preceq)$ קבוצה סדורה חלקית ונניח כי $|a|>\max\{2,|\prec|\}$. הוכיחו כי $\preceq$ אינו סדר מלא.

הוכחה נסמן ב־$\binom{a}{2}$ את אוסף כל הקבוצות החלקיות ל־a מעוצמה 2. פורמלית:

$$\binom{a}{2}=\left\{\{x,y\}\in a^2\mid x\neq y\right\}$$

נשים לב כי אם $\preceq$ הנו סדר מלא, לכל $\{x,y\}\in\binom{a}{2}$ מתקיים $x\prec y$ או $y\prec x$. כלומר: $(x,y)\in\prec$ או $(y,x)\in\prec$. לכן, נוכל להגדיר $f:\binom{a}{2}\to\prec$ באופן הבא:

$$f(\{x,y\})=\begin{cases}(x,y) & x\prec y\\ (y,x) & y\prec x\end{cases}$$

וקל להשתכנע ש־f חח"ע. לכן: $|a|<|\prec|\leq\left|\binom{a}{2}\right|$. אבל: ברור כי לכל a מעוצמה גדולה או שווה ל־3, $\left|\binom{a}{2}\right|\geq|a|$, וזו סתירה.