מבוא לתורת הקבוצות - תרגיל 11

להגשה עד ליום רביעי ה־1 בפברואר 2012

1. תהי $A \subseteq \mathbb{Z}$ חסומה מלעיל ומלרע. הוכיחו כי A סופית.
2. תהי $A \subseteq \mathbb{Z}$ חסומה מלעיל וסדורה היטב (לפי $\leq$). הוכיחו כי A סופית.
3. תהי $(x, \preceq)$ קבוצה סדורה חלקית, ונניח כי קיים איזומורפיזם $f : x \to \mathbb{Z}$ (כאשר $\mathbb{Z}$ מצויידת בסדר הרגיל). תהי $a \subseteq x$ חסומה מלעיל וסדורה היטב (לפי $\preceq$). הוכיחו כי a סופית.
4. תהי $(x, \leq)$ קבוצה סדורה היטב, ונניח כי גם $(x, \geq)$ סדורה היטב. הוכיחו כי x סופית.
5. נניח כי $(a, \leq_a)$ סדורה קווית ו־$(b, \leq_b)$ סדורה חלקית, וכי $f : a \to b$ הפיכה ושומרת סדר. הוכיחו כי f איזומורפיזם ו־$\leq_b$ סדר מלא על b.[1]
6. הוכיחו כי $(\mathbb{R}, \leq)$ ו־$(\mathbb{R}, \geq)$ איזומורפיים.
7. יהיו $(a, \leq_a)$ ו־$(b, \leq_b)$ קבוצות סדורות חלקית, ויהי $f : a \to b$ איזומורפיזם. הוכיחו כי:

(א) אם ב־a יש איבר מקסימלי ($m \in a$ כך שלכל m $x \geq_a m$, $x = m$), גם ב־b יש איבר מקסימלי.

(ב) אם ב־a יש איבר אחרון ($\ell \in a$ כך שלכל $x \in a$, $x \leq_a \ell$), גם ב־b יש איבר אחרון.

(ג) אם ב־a יש סדרה אינסופית יורדת (ממש), גם ב־b יש סדרה כזו.

(ד) אם לכל איבר (שאינו ראשון) ב־a יש קודם מיידי[2], אז גם לכל איבר ב־b (שאינו ראשון) יש קודם מיידי.

(ה) אם a צפוף (כלומר, לכל $x <_a y$ ב־a קיים $z \in a$ עבורו $x <_a z <_a y$) אז גם b צפוף.

(ו) אם הרישא של כל $x \in a$ הנו קבוצה סופית, אז גם הרישא של כל $y \in b$ הנו קבוצה סופית.

8. הראו כי כל אחד מזוגות הסדרים הבאים <u>אינם</u> איזומורפיים:

(א) $([0, \infty), \leq)$ ו־$((0, \infty), \leq)$

(ב) $(\mathbb{R}, \leq)$ ו־$(\mathbb{Q}, \leq)$

(ג) $(\mathbb{Z}, \leq)$ ו־$(\mathbb{Q}, \leq)$

(ד) $(\mathbb{N}, \leq)$ ו־$(\mathbb{N}, \geq)$

(ה) $(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \subseteq)$ ו־$(\mathbb{N}, \leq)$

(ו) $(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \subseteq)$ ו־$(\mathbb{R}, \leq)$

(ז) $\left(\left\{1 - \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^+\right\}, \leq\right)$ ו־$\left(\left\{1 - \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^+\right\} \cup \left\{2 - \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^+\right\}, \leq\right)$

9. תהי a קבוצה ותהי $(b, \leq)$ קבוצה סדורה היטב. נניח כי $|a| = |b|$. הוכיחו כי ניתן להגדיר על a סדר טוב.

[1] תוכלו להיעזר במה שהוכחנו בכיתה.

[2] קודם מיידי של x הנו איבר ש־x הנו העוקב המיידי שלו.