מבוא לתורת הקבוצות - תרגיל 12

לא להגשה

1. מצאו שיכון של $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ ב־$\mathbb{Q}$. האם קיים שיכון של $\mathbb{N} + \mathbb{N}$ ב־$\mathbb{Z}$?

פתרון ראשית נמצא שיכון של $\mathbb{Z}$ ב־$\mathbb{Q} \cap (0,2)$. לשם כך, נמצא שיכון של השלמים האי־שליליים ב־$\mathbb{Q} \cap [1,2)$ ושל השלמים השליליים ב־$\mathbb{Q} \cap (0,1)$. השיכון הראשון יהיה מהצורה הבאה:

$$f(z) = 2 - \frac{1}{z+1}$$

והשני מהצורה

$$g(z) = \frac{1}{1-z}$$

ואז $h = f \cup g$ הנו שיכון של $\mathbb{Z}$ ב־$(0,2)$. עתה, לכל $m \in \mathbb{Z}$ נגדיר

$$h_m(z) = h(z) + 2m$$

ונגדיר $\varphi : \mathbb{Z} * \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ באופן הבא:

$$\varphi(m,z) = h_m(z)$$

וזהו שיכון. ל־$\mathbb{N} + \mathbb{N}$ אין שיכון ב־$\mathbb{Z}$, שכן ב־$\mathbb{N} + \mathbb{N}$ ישנם שני איברים עם אינסוף איברים ביניהם, ואין תת קבוצה של $\mathbb{Z}$ עם התכונה הזו.

2. מצאו שיכון של $\mathbb{Q} + \mathbb{Q}$ ב־$\mathbb{Q}$. $\star$ האם הם איזומורפיים (כסדרים)?

פתרון נשכן ראשית את $\mathbb{Q}$ ב־$\mathbb{Q} \cap (0,\infty)$. נגדיר את הפונקציה $f : \mathbb{Q} \to (0,\infty) \cap \mathbb{Q}$ הבאה:

$$f(q) = \begin{cases} q + 97 & -3 \le q \\ -\frac{1}{q} & q < -3 \end{cases}$$

ונגדיר את הפונקציה $g : \mathbb{Q} \to (-\infty,0) \cap \mathbb{Q}$ הבאה:

$$g(q) = -\frac{1}{f(q)}$$

ואז $h = f \cup g$ הנה שיכון כדרוש. למעשה, הסדרים הנם איזומורפיים - אך לא נוכיח זאת כאן.

3. לכל אחת מן הקבוצות הבאות, קבעו האם היא טרנזיטיבית או לא:

$$A=\{\varnothing,\{\varnothing\},\{\{\varnothing\}\}\} \qquad B=\{\varnothing,\{\varnothing\},\{\{\varnothing\}\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\} \qquad C=\{\varnothing,\{\{\varnothing\}\}\}$$

$$D=\left\{n\in\omega\mid n<9^{2012}\right\} \qquad E=\{x\mid\forall y\in x\forall z\in y:\ z=\varnothing\} \qquad F=\mathcal{P}(\omega)$$

$$G=\{n\in\omega\mid n\text{ is even}\} \qquad H=\{T\subseteq\mathbb{N}\mid |T|<\aleph_0\}$$

פתרונות A,B הנן טרנזיטיביות. C אינה טרנזיטיבית, שכן $\{\{\varnothing\}\}\not\subseteq C$. $D=9^{2012}$, וממש כמו כל מספר טבעי אחר, היא טרנזיטיבית. $E=\{\{\varnothing\}\}$ ו־$E\not\subseteq\{\varnothing\}$ ולכן E אינה טרנזיטיבית. לכל $x\in\mathcal{P}(\omega)$ מתקיים שלכל $a\in x$, $a\in\omega$, ולכן $a\in\mathcal{P}(\omega)$, ומכאן $x\subseteq\mathcal{P}(\omega)$ ולכן F טרנזיטיבית. G אינה טרנזיטיבית, שכן $2\in G$ אך $2\not\subseteq G$. לכל $T\in H$ מתקיים שלכל $t\in T$, $t\in\mathbb{N}$, ולכן $|t|<\aleph_0$ ולכן $t\in H$, ומכאן $T\subseteq H$ ולכן H טרנזיטיבית.

4. הוכיחו כי T הנה טרנזיטיבית אם ורק אם $T\subseteq\mathcal{P}(T)$, אם ורק אם $\bigcup T\subseteq T$.

פתרון

- נניח כי T טרנזיטיבית. יהי $t\in T$. אז: $t\subseteq T$ ולכן $t\in\mathcal{P}(T)$ ולכן $T\subseteq\mathcal{P}(T)$.
- נניח כי $T\subseteq\mathcal{P}(T)$. יהי $t\in\bigcup T$. אז, קיים $s\in T$ עבורו $t\in s$. $s\in\mathcal{P}(T)$ ולכן $t\in s\subseteq T$ ולכן $t\in T$.
- נניח כי $\bigcup T\subseteq T$. יהי $s\in T$ ויהי $t\in s$. אז: $t\in\bigcup T$ ולכן $t\in T$ ולכן T טרנזיטיבית.

5. תהי X קבוצה, ונניח כי כל $A\in X$ הנה טרנזיטיבית. הוכיחו כי $\bigcup X$ הנה טרנזיטיבית.

פתרון יהי $y\in\bigcup X$ ויהי $x\in y$. קיים $A\in X$ כך ש־$y\in A$, ומטרנזיטיביות A $x\in A$ ולכן $x\in\bigcup X$ ולכן $\bigcup X$ הנה טרנזיטיבית.

6. יהיו α,β סודרים. ודאו כי אתם מבינים מדוע $\alpha+\beta$, $\alpha\cdot\beta$ ו־α^β הנם סודרים.

7. יהי α סודר. הוכיחו כי $0+\alpha=\alpha$, כי $0\cdot\alpha=0$, כי $1\cdot\alpha=\alpha$ וכי $1^\alpha=1$.

8. יהיו α,β סודרים ויהי $n\in\omega$. נניח כי $\alpha+n=\beta+n$. הוכיחו כי $\alpha=\beta$.

הוכחה באינדוקציה על n.

בסיס $n=0$ – הטענה טריביאלית.

צעד נניח כי $\alpha+(n+1)=\beta+(n+1)$. נשים לב כי לפי הגדרת החיבור,

$$\begin{aligned}(\alpha+n)+1&=\alpha+(n+1)\\(\beta+n)+1&=\beta+(n+1)\end{aligned}$$

ולכן

$$\begin{aligned}(\alpha+n)+1&=(\beta+n)+1\\s(\alpha+n)&=s(\beta+n)\end{aligned}$$

ולכן (למה?) $\alpha+n=\beta+n$. מהנחת האינדוקציה, $\alpha=\beta$, כדרוש.

9. יהיו α, β, γ סודרים. נניח כי $\alpha + \gamma = \beta + \gamma$. האם בהכרח נובע כי $\alpha = \beta$?

לא. למשל, $2 + \omega = 3 + \omega$.

10. יהיו α, β סודרים, $\beta > 0$. הוכיחו כי $\alpha + \beta > \alpha$. האם בהכרח $\beta + \alpha > \alpha$?

הוכחה באינדוקציה על β.

בסיס $\beta = 1$. יש להוכיח כי $\alpha + 1 > \alpha$ – וזה נכון כי $\alpha \in s(\alpha)$.

עוקב $\beta = \gamma + 1$. יש להוכיח כי $\alpha + (\gamma + 1) > \alpha$, אך מספיק להראות כי $\alpha + (\gamma + 1) > \alpha + \gamma$, אך זה נובע מכך ש־

$$\alpha + \gamma \in s(\alpha + \gamma) = (\alpha + \gamma) + 1 = \alpha + (\gamma + 1)$$

גבולי $\beta = \bigcup_{\delta < \beta} \delta$. יש להוכיח כי $\alpha + \beta > \alpha$. זה נכון כי עבור $\delta_0 < \beta$ כלשהו,

$$\alpha < \alpha + \delta_0 < \bigcup_{\delta < \beta} \alpha + \delta = \alpha + \bigcup_{\delta < \beta} \delta = \alpha + \beta$$

לא בהכרח מתקיים $\beta + \alpha > \alpha$. למשל: $2 + \omega = \omega$.

11. יהיו α, β, γ סודרים. הוכיחו כי $\alpha + \beta < \alpha + \gamma$ אם ורק אם $\beta < \gamma$.

12. יהיו α, β סודרים, $\beta > 1$. הוכיחו כי $\alpha \cdot \beta > \alpha$. האם בהכרח $\beta \cdot \alpha > \alpha$?

הערה בשאלה זו יש לדרוש גם $\alpha > 0$.

הוכחה באינדוקציה על β.

בסיס $\beta = 2$. יש להוכיח כי $\alpha \cdot 2 > \alpha$. אכן:

$$\alpha \cdot 2 = \alpha + \alpha > \alpha + 0 = \alpha$$

כאשר אי השוויון במרכז הנו מסקנה של שאלה 11.

עוקב $\beta = \gamma + 1$. יש להוכיח כי $\alpha \cdot \beta > \alpha$. אכן:

$$\alpha \cdot \beta = \alpha \cdot (\gamma + 1) = \alpha \cdot \gamma + \alpha > \alpha \cdot \gamma + 0 = \alpha \cdot \gamma > \alpha$$

גבולי $\beta = \bigcup_{\delta < \beta} \delta$. יש להוכיח כי $\alpha \cdot \beta > \alpha$. אכן, עבור $\delta_0 \in \beta$ כלשהו מתקיים

$$\alpha \cdot \beta = \alpha \cdot \bigcup_{\delta < \beta} \delta = \bigcup_{\delta < \beta} \alpha \cdot \delta > \alpha \cdot \delta_0 > \alpha$$

לא מתקיים בהכרח $\beta \cdot \alpha > \alpha$. למשל $2 \cdot \omega = \omega$.

13. הוכיחו כי כפל סודרים אינו קומוטטיבי, אך אסוציאטיבי, ובנוסף דיסטריביוטיבי (ביחס לחיבור).

14. יהיו α, β סודרים בני מניה. הוכיחו כי $\alpha \cdot \beta$ הנו בן מניה.

טענת עזר יהי $n > 0$ טבעי; אז, $\alpha \cdot n$ בת מניה.

הוכחה באינדוקציה על n.

בסיס $n = 1$. אז: $\alpha \cdot n = \alpha$, ולכן $\alpha \cdot n$ בת מניה.

צעד מתקיים

$$\alpha \cdot (n+1) = \alpha \cdot n + \alpha$$

וזהו חיבור של שני סודרים בני מניה, והוכחנו בתרגול שזוהי קבוצה בת מניה.

הוכחה של השאלה באינדוקציה על β.

בסיס $\beta = \omega$. יש להראות כי $\alpha \cdot \omega$ הנה קבוצה בת מניה. אבל:

$$\alpha \cdot \omega = \bigcup_{n<\omega} \alpha \cdot n$$

וזהו איחוד בן מניה של קבוצות שראינו שהן בנות מניה (בטענת העזר).

עוקב $\beta = \gamma + 1$. אזי:

$$\alpha \cdot \beta = \alpha \cdot (\gamma + 1) = \alpha \cdot \gamma + \alpha$$

וזהו חיבור של שני סודרים בני מניה, ולכן זוהי קבוצה בת מניה.

גבולי $\beta = \bigcup_{\delta<\beta} \delta$. אזי:

$$\alpha \cdot \beta = \bigcup_{\delta<\beta} \alpha \cdot \delta$$

וזהו איחוד בן מניה של קבוצות שהן בנות מניה (לפי הנחת האינדוקציה), ולכן זוהי קבוצה בת מניה.

15. יהיו A, B קבוצות סדורות ש־α, β הנם סודרים בעלי אותו טיפוס סדר (בהתאמה). הוכיחו כי הקבוצה $B * A$ הנה מאותו טיפוס סדר של $\alpha \cdot \beta$.

16. יהיו α, β, γ סודרים, $\alpha > 0$. הוכיחו כי $\alpha \cdot \beta < \alpha \cdot \gamma$ אם ורק אם $\beta < \gamma$.

הוכחת כיוון ראשון נוכיח באינדוקציה על β שלכל $\gamma \leq \beta$ ולכל $\alpha > 0$ מתקיים $\alpha \cdot \gamma \leq \alpha \cdot \beta$.

בסיס $\beta = 0$. אז: $\gamma = 0$ ומתקיים

$$\alpha \cdot \gamma = \alpha \cdot 0 = 0 = \alpha \cdot 0 = \alpha \cdot \beta$$

עוקב $\beta = \eta + 1$. אם $\gamma = \beta$ הטענה ברורה. אחרת $\gamma < \beta$ ולכן $\gamma \leq \eta$. מהנחת האינדוקציה,

$$\alpha \cdot \gamma \leq \alpha \cdot \eta$$

לכן

$$\alpha \cdot \beta = \alpha \cdot (\eta + 1) = \alpha \cdot \eta + \alpha > \alpha \cdot \eta \geq \alpha \cdot \gamma$$

גבולי $\beta = \bigcup_{\delta<\beta} \delta$. אם $\gamma = \beta$ הטענה ברורה. אחרת, $\gamma < \beta$. לכן:

$$\alpha \cdot \gamma < \bigcup_{\delta<\beta} \alpha \cdot \delta = \alpha \cdot \beta$$

הוכחת כיוון שני נוכיח באינדוקציה על γ שלכל $\beta < \gamma$ ולכל $\alpha > 0$ מתקיים $\alpha \cdot \beta < \alpha \cdot \gamma$.

בסיס $\gamma = 0$ – הטענה נכונה באופן ריק (אין $\beta < \gamma$).

עוקב $\gamma = \eta + 1$. אזי, $\beta \leq \eta$. אזי, בסיוע הכיוון הראשון נובע כי

$$\alpha \cdot \gamma = \alpha \cdot (\eta + 1) = \alpha \cdot \eta + \alpha > \alpha \cdot \eta \geq \alpha \cdot \beta$$

גבולי $\gamma = \bigcup_{\delta<\gamma} \delta$. אזי,

$$\alpha \cdot \beta < \bigcup_{\delta<\gamma} \alpha \cdot \delta = \alpha \cdot \gamma$$

17. יהיו α, β, γ סודרים. נניח כי $\alpha \leq \beta$. הוכיחו כי:

(א) $\alpha + \gamma \leq \beta + \gamma$ (ב) $\alpha \cdot \gamma \leq \beta \cdot \gamma$ (ג) $\alpha^\gamma \leq \beta^\gamma$

הוכחות

(א) באינדוקציה על γ.

בסיס $\gamma = 0$. יש להוכיח כי $\alpha \leq \beta$, אך זה נתון.

עוקב $\gamma = \eta + 1$. יש להוכיח כי $\alpha + (\eta + 1) \leq \beta + (\eta + 1)$, וזה שקול להוכחת אי השוויון

$$(\alpha + \eta) + 1 \leq (\beta + \eta) + 1$$

יהי $x \in (\alpha + \eta) + 1$. אזי: $x \in \alpha + \eta$ או $x = \alpha + \eta$. במקרה הראשון נובע מהנחת האינדוקציה כי $x \in \beta + \eta$, ולכן $x \in (\beta + \eta) + 1$. במקרה השני נובע מהנחת האינדוקציה כי $x \leq \beta + \eta$ ולכן $x \in (\beta + \eta) + 1$. מכאן אי השויון הדרוש.

גבולי $\gamma = \bigcup_{\delta<\gamma} \delta$. עלינו להוכיח כי $\alpha + \gamma \leq \beta + \gamma$, וזה שקול להוכחת אי השויון

$$\bigcup_{\delta<\gamma} \alpha + \delta \leq \bigcup_{\delta<\gamma} \beta + \delta$$

ואכן, יהי x באגף שמאל. אזי, קיים $\delta < \gamma$ עבורו $x \in \alpha + \delta$. מהנחת האינדוקציה, $x \in \beta + \delta$, ולכן x באגף ימין.

(ב),(ג) בדומה.

18. יהיו α,β סודרים גדולים מ־1. הוכיחו כי $\alpha^\beta \geq \beta$. מצאו דוגמה ל־α,β אינסופיים עבורם $\alpha^\beta = \beta$.

הוכחה באינדוקציה על β.

בסיס $\beta = 2$. מתקיים

$$\alpha^2 = \alpha \cdot \alpha \geq \alpha \cdot 2 \geq 2 \cdot 2 > 2$$

כאשר אי השויון הראשון נובע משאלה 16 ואי השויון השני נובע משאלה 17.

צעד $\beta = \gamma + 1$. אזי: $\gamma \geq 1$. מתקיים

$$\alpha^\beta = \alpha^{\gamma+1} = \alpha^\gamma \cdot \alpha \geq \gamma \cdot \alpha \geq \gamma \cdot 2 = \gamma + \gamma \geq \gamma + 1$$

כאשר אי השויון הראשון נובע משאלה 17 בשילוב הנחת האינדוקציה, אי השויון השני נובע משאלה 16 ואי השויון השלישי נובע מכך ש־$\gamma \geq 1$ בשילוב שאלה 16.

גבולי $\beta = \bigcup_{\delta<\beta} \delta$. אזי:

$$\alpha^\beta = \bigcup_{\delta<\beta} \alpha^\delta \geq \bigcup_{\delta<\beta} \delta = \beta$$

כאשר עלינו להצדיק את אי השויון האמצעי. אכן: יהי $x \in \bigcup_{\delta<\beta} \delta$. אזי: קיים $\delta < \beta$ עבורו $x \in \delta$. מהנחת האינדוקציה, $x \in \alpha^\delta$. לכן $x \in \bigcup_{\delta<\beta} \alpha^\delta$.

דוגמה $\omega^{\omega_1} = \omega_1$.