מבוא לתורת הקבוצות – תרגיל 12

לא להגשה

1. מצאו שיכון של $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ ב־$\mathbb{Q}$. האם קיים שיכון של $\mathbb{N} + \mathbb{N}$ ב־$\mathbb{Z}$?
2. מצאו שיכון של $\mathbb{Q} + \mathbb{Q}$ ב־$\mathbb{Q}$. $\star$ האם הם איזומורפיים (כסדרים)?
3. לכל אחת מן הקבוצות הבאות, קבעו האם היא טרנזיטיבית או לא:

$$A = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}\} \qquad B = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\} \qquad C = \{\varnothing, \{\{\varnothing\}\}\}$$

$$D = \left\{n \in \omega \mid n < 9^{2012}\right\} \qquad E = \{x \mid \forall y \in x \forall z \in y : \, z = \varnothing\} \qquad F = \mathcal{P}(\omega)$$

$$G = \{n \in \omega \mid n \text{ is even}\} \qquad H = \{T \subseteq \mathbb{N} \mid |T| < \aleph_0\}$$

4. הוכיחו כי T הנה טרנזיטיבית אם ורק אם $T \subseteq \mathcal{P}(T)$, אם ורק אם $\bigcup T \subseteq T$.
5. תהי X קבוצה, ונניח כי כל $A \in X$ הנה טרנזיטיבית. הוכיחו כי $\bigcup X$ הנה טרנזיטיבית.
6. יהיו α, β סודרים. ודאו כי אתם מבינים מדוע $\alpha + \beta$, $\alpha \cdot \beta$ ו־α^β הנם סודרים.
7. יהי α סודר. הוכיחו כי $0 + \alpha = \alpha$, כי $0 \cdot \alpha = 0$, כי $1 \cdot \alpha = \alpha$ וכי $1^\alpha = 1$.
8. יהיו α, β סודרים ויהי $n \in \omega$. נניח כי $\alpha + n = \beta + n$. הוכיחו כי $\alpha = \beta$.
9. יהיו α, β, γ סודרים. נניח כי $\alpha + \gamma = \beta + \gamma$. האם בהכרח נובע כי $\alpha = \beta$?
10. יהיו α, β סודרים, $\beta > 0$. הוכיחו כי $\alpha + \beta > \alpha$. האם בהכרח $\beta + \alpha > \alpha$?
11. יהיו α, β, γ סודרים. הוכיחו כי $\alpha + \beta < \alpha + \gamma$ אם ורק אם $\beta < \gamma$.
12. יהיו α, β סודרים, $\beta > 1$. הוכיחו כי $\alpha \cdot \beta > \alpha$. האם בהכרח $\beta \cdot \alpha > \alpha$?
13. הוכיחו כי כפל סודרים אינו קומוטטיבי, אך אסוציאטיבי, ובנוסף דיסטריביוטיבי (ביחס לחיבור).
14. יהיו α, β סודרים בני מניה. הוכיחו כי $\alpha \cdot \beta$ הנו בן מניה.
15. יהיו A, B קבוצות סדורות ש־α, β הנם סודרים בעלי אותו טיפוס סדר (בהתאמה). הוכיחו כי הקבוצה $B * A$ הנה מאותו טיפוס סדר של $\alpha \cdot \beta$.
16. יהיו α, β, γ סודרים, $\alpha > 0$. הוכיחו כי $\alpha \cdot \beta < \alpha \cdot \gamma$ אם ורק אם $\beta < \gamma$.
17. יהיו α, β, γ סודרים. נניח כי $\alpha \leq \beta$. הוכיחו כי:

    (א) $\alpha + \gamma \leq \beta + \gamma$ (ב) $\alpha \cdot \gamma \leq \beta \cdot \gamma$ (ג) $\alpha^\gamma \leq \beta^\gamma$
18. יהיו α, β סודרים גדולים מ־1. הוכיחו כי $\alpha^\beta \geq \beta$. מצאו דוגמה ל־α, β אינסופיים עבורם $\alpha^\beta = \beta$.