מבוא לתורת הקבוצות – תרגיל 2 – הערות

1. מערכת קשרים שלמה הנה קבוצה של קשרים לוגיים עבורה לכל פסוק בתחשיב הפסוקים ניתן למצוא פסוק השקול לו טאוטולוגית, שהקשרים המצויים בו הנם ממערכת זו בלבד.

(א) הוכיחו כי $\{\neg, \vee\}$ הנה מערכת קשרים שלמה.

הוכחה תהי $T = v_1 \mid v_2 \mid \ldots \mid v_{2^n}$ טבלת אמת נתונה (עבור n פסוקים יסודיים, $p_1, \ldots, p_n$). לכל שורה k בטבלה נתאים פסוק $\alpha_k = \alpha_k^1 \wedge \alpha_k^2 \wedge \ldots \wedge \alpha_k^n$, כאשר לכל $i \in \{1, \ldots, n\}$, $\alpha_k^i = p_i$ אם בשורה ה־k בטבלה $p_i = T$, או $\alpha_k^i = \neg p_i$ אחרת. עתה, נגדיר

$$\alpha = \bigvee_{k \mid v_k = T} \alpha_k$$

(או, אם הקבוצה $\{k \mid v_k = T\}$ הנה ריקה, נבחר את α להיות סתירה כלשהי). ניתן לראות (בדקו!) שטבלת האמת של α הנה T. עם זאת, ב־α יש גם סימני גימום ($\wedge$), אותם לא רצינו. אבל: כל פסוק מהצורה $\mu \wedge \nu$ אפשר להחליף בפסוק שיש בו סימני $\neg$ ו־$\vee$ בלבד, וזאת באמצעות כללי דה־מורגן שהוכחתם בתרגיל הקודם.

(ב) הוכיחו כי $\{\wedge, \vee\}$ אינה מערכת קשרים שלמה.

הערה הוכחתם זאת בסוף התרגיל הקודם!

(ג) $\star$ האם קיימת מערכת קשרים שלמה ובה קשר לוגי (חד־ או דו־מקומי) אחד בלבד?

תשובה כן. מצאתם אחד כזה?

2. הצרינו את הטענות הבאות בעזרת הקשרים $\wedge, \vee, \leftrightarrow, \rightarrow, \neg$, הכמתים $\exists, \forall$, הסימנים $\in, =$, המספר 0, הקבוצות $\mathbb{Z}, \mathbb{R}$ והסימונים המתמטיים המקובלים לארבע פעולות החשבון הבסיסיות:

(א) קיים מספר שלם שהוא חזקה שנייה של מספר שלם וגם חזקה שלישית של מספר שלם.

- $\exists x, y, z \in \mathbb{Z}\,((x = y \cdot y) \wedge (x = z \cdot z \cdot z))$

(ב) השורש של מספר ממשי שאינו ריבוע שלם אינו רציונלי.

- $\forall r \in \mathbb{R}\,((\neg \exists z \in \mathbb{Z}\,(z \cdot z = \mathbb{R})) \rightarrow (\neg \exists m, n \in \mathbb{Z}\,((n \neq 0) \wedge (r = m/n))))$

(ג) קבוצת המספרים הטבעיים מוכלת בקבוצת המספרים הממשיים השונים מ־0.

- $\forall n \in \mathbb{Z}\,((\exists r \in \mathbb{R}\,(r \cdot r = n)) \rightarrow ((n \neq 0) \wedge (n \in \mathbb{R})))$

3. במערכת היסק $\mathcal{D}$ נתונות האקסיומות הבאות:

(א) $\alpha \to (\beta \to \alpha)$

(ב) $(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma))$

וכלל ההיסק הבא:

- $\dfrac{\alpha,\, \alpha \to \beta}{\beta}$

הוכיחו ב־$\mathcal{D}$ את הפסוק $p \to (q \to (q \to p))$.

פתרון הוכחה פורמלית תראה כך:

צעד	טענה	צידוק
א	$A :=$ ” $(q \to p) \to (q \to (q \to p))$ ”	אקסיומה 1
ב	$A \to (p \to ((q \to p) \to (q \to (q \to p))))$	אקסיומה 1
ג	$B :=$ ”$p \to ((q \to p) \to (q \to (q \to p)))$ ”	כלל היסק על שורות א,ב
ד	$B \to ((p \to (q \to p)) \to (p \to (q \to (q \to p))))$	אקסיומה 2
ה	$(p \to (q \to p)) \to (p \to (q \to (q \to p)))$	כלל היסק על שורות ג,ד
ו	$p \to (q \to p)$	אקסיומה 1
ז	$p \to (q \to (q \to p))$	כלל היסק על שורות ה,ו

4. הוכיחו כי כללי ההיסק הבאים הנם נאותים:

(א) $\dfrac{\alpha \to \gamma,\, \beta \to \gamma,\, \alpha \vee \beta}{\gamma}$

הוכחה בעזרת טבלת אמת:

α	β	γ	$\alpha \to \gamma$	$\beta \to \gamma$	$\alpha \vee \beta$	γ
T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	F	F	T	F
T	F	T	T	T	T	T
T	F	F	F	T	T	F
F	T	T	T	T	T	T
F	T	F	T	F	T	F
F	F	T	T	T	F	T
F	F	F	T	T	F	F

ואכן, בכל שורה שבה כל הפסוקים שבהנחה מקבלים T (הראשונה, השלישית והחמישית), כך גם הפסוק שבמסקנה מקבל T, ולכן הכלל נאות.

(ב) $\dfrac{\alpha \to \varphi,\, \beta \to \psi,\, \alpha \vee \beta}{\varphi \vee \psi}$

- פתרון דומה!

5. קבעו את ערך האמת של הפסוקים הבאים, ובטאו כל אחד מהם ללא שימוש בקשר השלילה:

(א) $\neg\forall x\in\mathbb{R}\left(\left(x>7\right)\to\left(\exists n\in\mathbb{N}\left(\left(n\leq x\right)\wedge\left(\forall m\in\mathbb{N}\left(\left(m>n\right)\to\left(m>x\right)\right)\right)\right)\right)\right)$

פתרון ללא השלילה, הפסוק אומר שלכל מספר ממשי גדול מ־7 קיים n טבעי שאינו גדול ממנו ושעבורו לכל טבעי $m>n$ מתקיים $m>x$. במילים אחרות: לכל מספר ממשי גדול מ־7 קיים מספר טבעי מקסימלי שקטן או שווה ממנו. טענה זו כמובן נכונה – הערך השלם של x מקיים אותה. מכיוון שיש שלילה, הפסוק מקבל ערך שקר. נבטא את הפסוק ללא שימוש בקשר השלילה, בשלבים:

$$\neg\forall x\in\mathbb{R}\left(\left(x>7\right)\to\left(\exists n\in\mathbb{N}\left(\left(n\leq x\right)\wedge\left(\forall m\in\mathbb{N}\left(\left(m>n\right)\to\left(m>x\right)\right)\right)\right)\right)\right)$$
$$\exists x\in\mathbb{R}\left(\neg\left(\left(x>7\right)\to\left(\exists n\in\mathbb{N}\left(\left(n\leq x\right)\wedge\left(\forall m\in\mathbb{N}\left(\left(m>n\right)\to\left(m>x\right)\right)\right)\right)\right)\right)\right)$$
$$\exists x\in\mathbb{R}\left(\left(x>7\right)\wedge\left(\neg\exists n\in\mathbb{N}\left(\left(n\leq x\right)\wedge\left(\forall m\in\mathbb{N}\left(\left(m>n\right)\to\left(m>x\right)\right)\right)\right)\right)\right)$$
$$\exists x\in\mathbb{R}\left(\left(x>7\right)\wedge\left(\forall n\in\mathbb{N}\left(\neg\left(\left(n\leq x\right)\wedge\left(\forall m\in\mathbb{N}\left(\left(m>n\right)\to\left(m>x\right)\right)\right)\right)\right)\right)\right)$$
$$\exists x\in\mathbb{R}\left(\left(x>7\right)\wedge\left(\forall n\in\mathbb{N}\left(\left(\left(\neg\left(n\leq x\right)\right)\vee\left(\neg\forall m\in\mathbb{N}\left(\left(m>n\right)\to\left(m>x\right)\right)\right)\right)\right)\right)\right)$$
$$\exists x\in\mathbb{R}\left(\left(x>7\right)\wedge\left(\forall n\in\mathbb{N}\left(\left(\left(n>x\right)\vee\left(\exists m\in\mathbb{N}\left(\neg\left(\left(m>n\right)\to\left(m>x\right)\right)\right)\right)\right)\right)\right)\right)$$
$$\exists x\in\mathbb{R}\left(\left(x>7\right)\wedge\left(\forall n\in\mathbb{N}\left(\left(\left(n>x\right)\vee\left(\exists m\in\mathbb{N}\left(\left(m>n\right)\wedge\left(\neg\left(m>x\right)\right)\right)\right)\right)\right)\right)\right)$$
$$\exists x\in\mathbb{R}\left(\left(x>7\right)\wedge\left(\forall n\in\mathbb{N}\left(\left(\left(n>x\right)\vee\left(\exists m\in\mathbb{N}\left(\left(m>n\right)\wedge\left(m\leq x\right)\right)\right)\right)\right)\right)\right)$$

הטענה ה"חדשה" אומרת כי קיים איזשהו מספר ממשי x גדול מ־7 שעבורו מתקיים שכל מספר טבעי הנו גדול ממנו, או שהוא קטן ממנו ויש טבעי אחר ביניהם. הטענה הזו, כמובן, גם היא לא נכונה, שכן הערך השלם של x הנו טבעי שאינו גדול מ־x, וגם אין טבעי נוסף שונה בינו לבין x.

(ב) $\forall q\in\mathbb{Q}\left(\neg\exists\varepsilon\in\mathbb{R}\left(\left(\varepsilon>0\right)\wedge\left(\forall x\in\mathbb{R}\left(\left(\left|x-q\right|<\varepsilon\right)\to\left(x\in\mathbb{Q}\right)\right)\right)\right)\right)$

- בדומה!