

מבוא לתורת הקבוצות – תרגיל 2

להגשה עד ליום רביעי ה־30 בנובמבר 2011

1. מערכת קשרים שלמה הנה קבוצה של קשרים לוגיים עבודה לכל פסוק בתחשיב הפסוקים ניתן למצוא פסוק השקול לו טאוטולוגית, שהקשרים המצויים בו הנם ממערכת זו בלבד.

(א) הוכיחו כי $\{\neg, \vee\}$ הנה מערכת קשרים שלמה.

(ב) הוכיחו כי $\{\wedge, \vee\}$ אינה מערכת קשרים שלמה.

(ג) האם קיימת מערכת קשרים שלמה ובה קשר לוגי (חד־ או דו־מקומי) אחד בלבד?

2. הצרינו את הטענות הבאות בעזרת הקשרים $\neg, \rightarrow, \leftrightarrow, \vee, \wedge$, הכמתים \forall, \exists , הסימנים $\in, =$, המספר 0, הקבוצות \mathbb{Z}, \mathbb{R} והסימונים המתמטיים המקובלים לארבע פעולות החשבון הבסיסיות:

(א) קיים מספר שלם שהוא חזקה שנייה של מספר שלם וגם חזקה שלישית של מספר שלם.

(ב) השורש של מספר ממשי שאינו ריבוע שלם אינו רציונלי.

(ג) קבוצת המספרים הטבעיים מוכלת בקבוצת המספרים הממשיים השונים מ־0.

3. במערכת היסק \mathcal{D} נתונות האקסיומות הבאות:

$$(א) \alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$$

$$(ב) (\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$$

וכלל ההיסק הבא:

$$\frac{\alpha, \alpha \rightarrow \beta}{\beta} \bullet$$

הוכיחו ב־ \mathcal{D} את הפסוק $p \rightarrow (q \rightarrow (q \rightarrow p))$.

4. הוכיחו כי כללי ההיסק הבאים הנם נאותים:

$$(א) \frac{\alpha \rightarrow \gamma, \beta \rightarrow \gamma, \alpha \vee \beta}{\gamma}$$

$$(ב) \frac{\alpha \rightarrow \varphi, \beta \rightarrow \psi, \alpha \vee \beta}{\varphi \vee \psi}$$

5. קבעו את ערך האמת של הפסוקים הבאים, ובטאו כל אחד מהם ללא שימוש בקשר השלילה:

$$(א) \neg \forall x \in \mathbb{R} ((x > 7) \rightarrow (\exists n \in \mathbb{N} ((n \leq x) \wedge (\forall m \in \mathbb{N} ((m > n) \rightarrow (m > x))))))$$

$$(ב) \forall q \in \mathbb{Q} (\neg \exists \varepsilon \in \mathbb{R} ((\varepsilon > 0) \wedge (\forall x \in \mathbb{R} (|x - q| < \varepsilon) \rightarrow (x \in \mathbb{Q}))))$$