מבוא לתורת הקבוצות – תרגיל 3

להגשה עד ליום ראשון ה־4 בדצמבר 2011

הגדרה נגדיר <u>הפרש סימטרי</u> של קבוצות באופן הבא:

$$A\triangle B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$$

1. רשמו את $A\setminus B$ ואת $A\triangle B$ עבור הקבוצות הבאות:
   (א) $B=\{1,4,7\}$,$A=\{1,3,5,7,9\}$
   (ב) $B=\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$,$A=\left\{\frac{m}{n}\mid m,n\in\mathbb{Z},\, n>2\right\}$
   (ג) A המקיימת $A\triangle\mathbb{C}=\varnothing$, $B=\mathbb{R}$

הגדרה נגדיר <u>מכפלה קרטזית</u> של קבוצות באופן הבא:

$$A\times B=\{(u,v)\mid u\in A,\, v\in B\}$$

2. הוכיחו או הפריכו כל אחת מן הטענות הבאות:
   (א) פעולת החיסור של קבוצות ($\setminus$) הנה סימטרית.
   (ב) פעולת ההפרש הסימטרי ($\triangle$) הנה אסוציאטיבית.
   (ג) פעולת הכפל של קבוצות ($\times$) הנה קומוטטיבית.
3. הוכיחו כל אחת מן הטענות הבאות:
   (א) $A\subseteq B$ אם ורק אם $A\cap B=A$ אם ורק אם $A\cup B=B$ אם ורק אם $A\setminus B=\varnothing$ אם ורק אם $A\setminus B\subseteq B$.
   (ב) מכפלה קרטזית של שתי קבוצות היא ריקה אם ורק אם אחת מן הקבוצות במכפלה הנה ריקה.
4. יהיו A,B,X,Y קבוצות. הוכיחו שניים מבין השוויונים הבאים:
   (א) $(A\cup B)\times X=(A\times X)\cup(B\times X)$
   (ב) $A\times(X\cup Y)=(A\times X)\cup(A\times Y)$
   (ג) $(A\cap B)\times X=(A\times X)\cap(B\times X)$
   (ד) $A\times(X\cap Y)=(A\times X)\cap(A\times Y)$

הגדרה תהי $\langle x_n \mid n \in \mathbb{N} \rangle$ סדרת קבוצות. אם $\underline{\lim} x_n = \overline{\lim} x_n$ אז מסמנים

$$\underline{\lim} x_n = \lim x_n = \overline{\lim} x_n$$

קרי: $\lim x_n$ הנו הגבול של הסדרה x_n.

5. תהי $\langle x_n \mid n \in \mathbb{N} \rangle$ סדרה של קבוצות הקבועה ממקום מסוים; כלומר, עבורה קיים $k \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n \geq k$ מתקיים $x_n = x_k$. הוכיחו כי לסדרה זו קיים גבול ומצאו אותו.

6. תהי $\langle x_n \mid n \in \mathbb{N} \rangle$ סדרה של קבוצות, ותהי x_{n_k} תת סדרה אינסופית שלה. הוכיחו:

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} x_n \subseteq \underline{\lim} x_n \subseteq \underline{\lim} x_{n_k} \subseteq \overline{\lim} x_{n_k} \subseteq \overline{\lim} x_n \subseteq \bigcup_{n=0}^{\infty} x_n$$

מצאו דוגמה עבורה

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} x_n \subset \underline{\lim} x_n \subset \underline{\lim} x_{n_k} \subset \overline{\lim} x_{n_k} \subset \overline{\lim} x_n \subset \bigcup_{n=0}^{\infty} x_n$$

ומצאו דוגמה עבורה

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} x_n = \underline{\lim} x_n = \underline{\lim} x_{n_k} = \overline{\lim} x_{n_k} = \overline{\lim} x_n = \bigcup_{n=0}^{\infty} x_n$$

7. נגדיר סדרה $\langle x_n \mid n \in \mathbb{N}_+ \rangle$ באופן הבא:

$$x_n = \left\{ \frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{N} \right\}$$

מצאו את $\underline{\lim} x_n$ ואת $\overline{\lim} x_n$. האם ל-x_n יש גבול?