מבוא לתורת הקבוצות – תרגיל 4 – הערות

1. הוכיחו או הפריכו: פעולת ההרכבה של יחסים הנה אסוציאטיבית אך לא קומוטטיבית.

הוכחה מתקיים

$$\begin{aligned} T\circ(S\circ R) &= \{(x,w)\mid \exists z:\,(x,z)\in S\circ R\,\wedge\, zTw\}\\ &= \{(x,w)\mid \exists z\exists y:\,xRy\,\wedge\, ySz\,\wedge\, zTw\}\\ &= \{(x,w)\mid \exists y:\,xRy\,\wedge\,(y,w)\in T\circ S\}\\ &= (T\circ S)\circ R \end{aligned}$$

מצד שני, אם $R=\{(1,2)\}$ ו־$S=\{(2,3)\}$, אז

$$\begin{aligned} S\circ R &= \{(1,3)\}\\ R\circ S &= \varnothing \end{aligned}$$

2. יהיו R,S יחסים רפלקסיביים וסימטריים מעל קבוצה X כלשהי. הוכיחו או הפריכו (על ידי מתן דוגמה נגדית) כל אחת מן הטענות הבאות:

(א) $R\cap S$ הנו יחס רפלקסיבי מעל X

הוכחה יהי $x\in X$. אזי: $(x,x)\in R$ (כי R רפלקסיבי) ו־$(x,x)\in S$ (כי S רפלקסיבי) ולכן $(x,x)\in R\cap S$ ולכן $R\cap S$ רפלקסיבי (מעל X).

(ב) $R\cup S$ הנו יחס רפלקסיבי מעל X

הוכחה זהה.

(ג) $R\triangle S$ הנו יחס סימטרי מעל X

הוכחה יהי $(a,b)\in R\triangle S$. נניח בלי הגבלת הכלליות כי $(a,b)\in R\smallsetminus S$. בפרט, $(a,b)\in R$. לכן $(b,a)\in R$ (מסימטריות R). אבל $(b,a)\notin S$, שכן אחרת היה מתקיים $(a,b)\in S$ (מסימטריות S) בניגוד להנחתנו. לכן $(b,a)\in R\smallsetminus S$, וממילא $(b,a)\in R\triangle S$. קיבלנו ש־$R\triangle S$ סימטרי.

3. הוכיחו או הפריכו:

(א) אם R הנו יחס אנטי־סימטרי חלש אז הוא יחס אנטי־סימטרי חזק

הפרכה היחס $\leq$ על $\mathbb{Z}$.

(ב) אם R הנו יחס אנטי־סימטרי חזק אז הוא יחס אנטי־סימטרי חלש

הוכחה עלינו להראות שלכל a,b המקיימים $(a,b) \in R$ וגם $(b,a) \in R$, מתקיים $a = b$. אבל: אין a,b כאלה (מאנטי־סימטריות חזקה) ולכן הטענה מתקיימת "באופן ריק".

(ג) אם R הנו יחס אנטי־סימטרי חזק אז הוא יחס אנטי־רפלקסיבי

הוכחה עלינו להראות שאין a עבורו $(a,a) \in R$. נניח בשלילה שדווקא יש a כזה; אזי, $(a,a) \in R$ וגם $(a,a) \in R$ (הפכנו את הסדר ב־(a,a)), אבל קיבלנו אותו הדבר), בסתירה לאנטי־סימטריות חזקה.

(ד) אם R הנו יחס אנטי־סימטרי חזק ו־$S \subseteq R$ אז גם S הנו יחס אנטי־סימטרי חזק

הוכחה נניח בשלילה אחרת. אזי, קיימים a,b כך ש־$(a,b) \in S$ וגם $(b,a) \in S$. אבל $S \subseteq R$ ולכן $(a,b) \in R$ וגם $(b,a) \in R$, בסתירה לאנטי־סימטריות חזקה של R.

(ה) אם R הנו יחס רפלקסיבי ו־$S \supseteq R$ אז גם S הנו יחס רפלקסיבי (כיחסים מעל אותה הקבוצה)

הוכחה יהי a בקבוצה (ש־R מעליה). אזי $(a,a) \in R$, שכן R רפלקסיבי. מאחר ו־$R \subseteq S$, $(a,a) \in S$. לכן S רפלקסיבי (מעל אותה הקבוצה).

4. יהי R יחס סימטרי טרנזיטיבי ולא רפלקסיבי מעל קבוצה לא ריקה A. הוכיחו כי קיים $a \in A$ עבורו לכל $b \in A$, $(a,b) \notin R$.

הוכחה R אינו רפלקסיבי, ולכן קיים $a \in A$ עבורו $(a,a) \notin R$. נניח שקיים $b \in A$ עבורו $(a,b) \in R$. מסימטריות R נקבל $(b,a) \in R$, ומטרנזיטיביות נקבל $(a,a) \in R$, סתירה. a זה מקיים את הדרוש.

5. יחס R ייקרא <u>מעגלי</u> אם

$$\forall a,b,c,\ (aRb \wedge bRc) \rightarrow cRa$$

יהי R יחס מעגלי רפלקסיבי. הוכיחו כי R טרנזיטיבי.

הוכחה נוכיח קודם כל שהוא סימטרי. אכן, יהי $(a,b) \in R$. מרפלקסיביות R, גם $(a,a) \in R$. ממעגליות נקבל $(b,a) \in R$ ולכן R סימטרי.

נוכיח עתה כי הוא טרנזיטיבי. יהיו $(u,v), (v,w) \in R$. ממעגליות נקבל כי $(w,u) \in R$. מסימטריה נקבל כי $(u,w) \in R$, ולכן R טרנזיטיבי.

6. הוכיחו כי:

(א) היחס L_η המכיל בדיוק את כל זוגות הפסוקים (α,β) עבורם הפסוק $\eta\to(\alpha\leftrightarrow\beta)$ הנו טאוטולוגיה (מעל קבוצת כל הפסוקים) הנו רפלקסיבי

הוכחה יהי α פסוק. עלינו להראות כי $(\alpha,\alpha)\in L_\eta$. זה מתקיים אם ורק אם $\eta\to(\alpha\leftrightarrow\alpha)$ הנו טאוטולוגיה; זאת קל לראות בעזרת טבלת אמת.

(ב) היחס $V=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid x-y\in\mathbb{Q}\right\}$ (מעל $\mathbb{R}$) הנו סימטרי

הוכחה יהי $(a,b)\in V$. אזי: $a-b\in\mathbb{Q}$. לכן גם $b-a\in\mathbb{Q}$ (למה?). מכאן: $(b,a)\in V$, ולכן V סימטרי.

(ג) היחס $S=\left\{(\sigma,\tau)\in\left(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\right)^2\mid\forall\varepsilon>0\exists N\in\mathbb{N}\forall n>N\left(\left|\sigma\left(n\right)-\tau\left(n\right)\right|<\varepsilon\right)\right\}$ (מעל $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$) הנו טרנזיטיבי

הוכחה יהיו $(\sigma,\tau),(\tau,\upsilon)\in S$. עלינו להראות כי $(\sigma,\upsilon)\in S$. מהנתון:

$$\forall\varepsilon>0\exists N\in\mathbb{N}\forall n>N\left(\left|\sigma\left(n\right)-\tau\left(n\right)\right|<\varepsilon\right)$$

וגם

$$\forall\varepsilon>0\exists N\in\mathbb{N}\forall n>N\left(\left|\tau\left(n\right)-\upsilon\left(n\right)\right|<\varepsilon\right)$$

יהי $\varepsilon>0$. מהנתון הראשון קיים N_1 עבורו לכל $n>N$ מתקיים

$$\left|\sigma\left(n\right)-\tau\left(n\right)\right|<\varepsilon/2$$

הנתון השני מבטיח לנו קיומו של N_2 עבורו לכל $n>N$ מתקיים

$$\left|\tau\left(n\right)-\upsilon\left(n\right)\right|<\varepsilon/2$$

נבחר $N'=\max\left\{N_1,N_2\right\}$. אזי: לכל $n>N'$ מתקיים $n>N_1$ וגם $n>N_2$ ולכן $\left|\sigma\left(n\right)-\tau\left(n\right)\right|<\varepsilon/2$ וגם $\left|\tau\left(n\right)-\upsilon\left(n\right)\right|<\varepsilon/2$. מאי שוויון המשולש נובע כי

$$\begin{aligned}\left|\sigma\left(n\right)-\upsilon\left(n\right)\right| &= \left|\sigma\left(n\right)-\tau\left(n\right)+\tau\left(n\right)-\upsilon\left(n\right)\right|\\ &\leq \left|\sigma\left(n\right)-\tau\left(n\right)\right|+\left|\tau\left(n\right)-\upsilon\left(n\right)\right|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon\end{aligned}$$

ולכן $(\sigma,\upsilon)\in S$, כדרוש.