מבוא לתורת הקבוצות - תרגיל 4

להגשה עד ליום ראשון ה־11 בדצמבר 2011

1. הוכיחו או הפריכו: פעולת ההרכבה של יחסים הנה אסוציאטיבית אך לא קומוטטיבית.

2. יהיו R, S יחסים רפלקסיביים וסימטריים מעל קבוצה X כלשהי. הוכיחו או הפריכו (על ידי מתן דוגמה נגדית) כל אחת מן הטענות הבאות:
   (א) $R \cap S$ הנו יחס רפלקסיבי מעל X
   (ב) $R \cup S$ הנו יחס רפלקסיבי מעל X
   (ג) $R \triangle S$ הנו יחס סימטרי מעל X

3. הוכיחו או הפריכו:
   (א) אם R הנו יחס אנטי־סימטרי חלש אז הוא יחס אנטי־סימטרי חזק
   (ב) אם R הנו יחס אנטי־סימטרי חזק אז הוא יחס אנטי־סימטרי חלש
   (ג) אם R הנו יחס אנטי־סימטרי חזק אז הוא יחס אנטי־רפלקסיבי
   (ד) אם R הנו יחס אנטי־סימטרי חזק ו־$S \subseteq R$ אז גם S הנו יחס אנטי־סימטרי חזק
   (ה) אם R הנו יחס רפלקסיבי ו־$S \supseteq R$ אז גם S הנו יחס רפלקסיבי (כיחסים מעל אותה הקבוצה)

4. יהי R יחס סימטרי טרנזיטיבי ולא רפלקסיבי מעל קבוצה לא ריקה A. הוכיחו כי קיים $a \in A$ עבורו לכל $b \in A$, $(a,b) \notin R$.

5. יחס R ייקרא <u>מעגלי</u> אם
$$\forall a,b,c,\ (aRb \wedge bRc) \to cRa$$
   יהי R יחס מעגלי רפלקסיבי. הוכיחו כי R טרנזיטיבי.

6. הוכיחו כי:
   (א) היחס L_η המכיל בדיוק את כל זוגות הפסוקים (α,β) עבורם הפסוק $\eta \to (\alpha \leftrightarrow \beta)$ הנו טאוטולוגיה (מעל קבוצת כל הפסוקים) הנו רפלקסיבי
   (ב) היחס $V = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - y \in \mathbb{Q}\right\}$ (מעל $\mathbb{R}$) הנו סימטרי
   (ג) היחס $S = \left\{(\sigma,\tau) \in \left(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\right)^2 \mid \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n > N \left(\left|\sigma(n) - \tau(n)\right| < \varepsilon\right)\right\}$ (מעל $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$) הנו טרנזיטיבי

7. $\star$ תהי X קבוצה סופית כלשהי. מצאו:
   (א) כמה יחסים רפלקסיביים יש מעל X
   (ב) כמה יחסים סימטריים יש מעל X
   (ג) כמה יחסים רפלקסיביים וסימטריים יש מעל X

הכנה לתרגול הבא ודאו שאתם מבינים מדוע לכל קבוצה x מתקיים $x \triangle x = \varnothing$ וגם $x \triangle \varnothing = x$, מדוע הפעולה $\triangle$ הנה אסוציאטיבית, ומדוע הפרש סימטרי של שתי קבוצות סופיות הנו סופי.