מבוא לתורת הקבוצות – תרגיל 5 – הערות

1. יהי R יחס. הסבירו מדוע הטענה "R סימטרי" שקולה לטענה "$R = R^{-1}$".

הסבר נניח כי R סימטרי, ונראה כי $R = R^{-1}$. נראה זאת על ידי הכלה דו צדדית. יהי $(a,b) \in R$. מאחר ו־R סימטרי, גם $(b,a) \in R$. לכן: $(a,b) \in R^{-1}$. מכאן: $R \subseteq R^{-1}$. בדומה מראים ש־$R^{-1} \subseteq R$ ומכאן השוויון הדרוש.
נניח עתה כי $R = R^{-1}$ ונראה כי R סימטרי. נראה זאת על פי ההגדרה של סימטריה. יהי $(x,y) \in R$. מההנחה, $(x,y) \in R^{-1}$. לכן: $(y,x) \in R$. מכאן: R סימטרי.

2. נגדיר את היחסים R, S על $\mathbb{Z}$ באופן הבא:

- aRb אם ורק אם $5 \mid a - b$
- aSb אם ורק אם $5 \mid a + b$

הוכיחו כי R הנו יחס שקילות. האם $R \cup S$ הנו יחס שקילות? הוכיחו את תשובתכם!

הוכחה ש־R הנו יחס שקילות נוכיח בשלבים.

רפלקסיביות יהי $z \in \mathbb{Z}$. אזי, $5 \mid z - z$ (כי כל מספר מחלק את 0) ולכן $(5,5) \in R$.

סימטריה נניח כי $(a,b) \in R$. אזי: $5 \mid a - b$ ולכן $5 \mid b - a$ ומכאן $(b,a) \in R$.

טרנזיטיביות נניח כי $(a,b), (b,c) \in R$. אזי: $5 \mid a - b$ וגם $5 \mid b - c$. נרשום $a - b = 5m$, $b - c = 5n$, $m,n \in \mathbb{Z}$. אזי:

$$a - c = a - b + b - c = 5m + 5n = 5(m+n)$$

ולכן $5 \mid a - c$ ומכאן $(a,c) \in R$.

הוכחה ש־$R \cup S$ הנו יחס שקילות ראשית נשים לב ש־S אינו יחס שקילות. למשל, כי הוא אינו רפלקסיבי (הרי $(1,1) \notin S$). אך האם מכאן נובע ש־$R \cup S$ אינו יחס שקילות? לא נוכל להסיק זאת. ואכן:

רפלקסיביות יהי $z \in \mathbb{Z}$. כפי שראינו, $(z,z) \in R$ ולכן $(z,z) \in R \cup S$.

סימטריה נניח כי $(a,b) \in R \cup S$. אם $(a,b) \in R$ אז $(b,a) \in R$ (שכן R סימטרי) ולכן $(b,a) \in R \cup S$. אם $(a,b) \in S$ אזי $(b,a) \in S$ (שכן S סימטרי – מדוע?) ולכן $(b,a) \in R \cup S$. **הערה:** שימו לב שבעצם הוכחנו כאן שאיחוד של יחסים סימטריים הנו סימטרי!

טרנזיטיביות נניח כי $(a,b), (b,c) \in R \cup S$. נבחין בין 4 המקרים הבאים:

מקרה א' $(a,b), (b,c) \in R$, ואז $(a,c) \in R$ (שכן R טרנזיטיבי) ולכן $(a,c) \in R \cup S$.

מקרה ב' $(a,b), (b,c) \in S$, ואז $5 \mid a + b$ וגם $5 \mid b + c$. נרשום $a + b = 5m$, $b + c = 5n$, $m,n \in \mathbb{Z}$. נחסר את שני השוויונים ונקבל

$$\begin{aligned} a + b - (b + c) &= 5m - 5n \\ a - c &= 5(m-n) \end{aligned}$$

ולכן $5 \mid a - c$ ומכאן $(a,c) \in R$ וממילא $(a,c) \in R \cup S$.

מקרה ג' $(a,b)\in R$ ו־$(b,c)\in S$, ואז $a-b \mid 5$ וגם $b+c \mid 5$. נרשום $a-b=5m$, $b+c=5n$, $m,n\in\mathbb{Z}$. נחבר את שני השוויונים ונקבל

$$\begin{aligned} a-b+(b+c) &= 5m+5n \\ a+c &= 5(m+n) \end{aligned}$$

ולכן $a+c \mid 5$ ומכאן $(a,c)\in S$ וממילא $(a,c)\in R\cup S$.

מקרה ד' $(a,b)\in S$ ו־$(b,c)\in R$, ואז $a+b \mid 5$ וגם $b-c \mid 5$. נרשום $a+b=5m$, $b-c=5n$, $m,n\in\mathbb{Z}$. נחסר את שני השוויונים ונקבל

$$\begin{aligned} a+b-(b-c) &= 5m-5n \\ a+c &= 5(m-n) \end{aligned}$$

ולכן $a+c \mid 5$ ומכאן $(a,c)\in S$ וממילא $(a,c)\in R\cup S$.

בכל מקרה קיבלנו ש־$(a,c)\in R\cup S$, ולכן $R\cup S$ טרנזיטיבי.

3. יהיו R,S יחסי שקילות מעל קבוצה x (לא ריקה) כלשהי. הוכיחו או הפריכו כל אחת מן הטענות הבאות:

(א) $R\cap S$ הנו יחס שקילות מעל x

(ב) $R\cup S$ הנו יחס שקילות מעל x

פתרונות

(א) הטענה נכונה. נוכיח בשלבים:

רפלקסיביות יהי $a\in x$. מרפלקסיביות R ו־S נובע כי $(a,a)\in R$ וגם $(a,a)\in S$ ולכן $(a,a)\in R\cap S$.

סימטריה יהי $(a,b)\in R\cap S$. אזי, $(a,b)\in R$ ולכן $(b,a)\in R$ (שכן R סימטרי). בדומה, $(a,b)\in S$ ולכן $(b,a)\in S$ (שכן S סימטרי). לכן $(b,a)\in R\cap S$.

טרנזיטיביות יהיו $(a,b),(b,c)\in R\cap S$. אזי, $(a,b),(b,c)\in R$ ולכן $(a,c)\in R$ (שכן R טרנזיטיבי). בדומה, $(a,b),(b,c)\in S$ ולכן $(a,c)\in S$ (שכן S טרנזיטיבי). לכן $(a,c)\in R\cap S$.

(ב) הטענה אינה נכונה. להלן דוגמה: $x=\{1,2,3\}$,

$$\begin{aligned} R &= \{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),(2,1)\} \\ S &= \{(1,1),(2,2),(3,3),(1,3),(3,1)\} \end{aligned}$$

ודאו כי הדוגמה מתאימה כאן.

4. הוכיחו כי יחס רפלקסיבי הנו מעגלי[1] אם ורק אם הוא יחס שקילות.

הערה בתרגיל הקודם (שאלה 5) הוכחנו כי אם יחס הנו מעגלי ורפלקסיבי אזי הוא גם סימטרי וטרנזיטיבי, ולכן הוא יחס שקילות. לכן כל שנותר להראות הוא שיחס שקילות הנו מעגלי.

[1]הוגדר בתרגיל הקודם.

5. יהיו x,y קבוצות לא ריקות, תהי $f:x\to y$ פונקציה ויהי $r\subseteq x\times y$ יחס עבורו $\mathrm{dom}r=x$. יהי $\sim$ יחס שקילות כלשהו על y. נגדיר את היחסים הבאים:

$$\begin{aligned} S_f &= \left\{(u,v)\in x^2 \mid f(u)\sim f(v)\right\}\\ S_r &= \left\{(u,v)\in x^2 \mid \exists u',v'\left(\left((u,u'),(v,v')\in r\right)\wedge(u'\sim v')\right)\right\}\end{aligned}$$

האם S_f הנו בהכרח יחס שקילות מעל x? האם S_r הנו בהכרח יחס שקילות מעל x? הוכיחו או מצאו דוגמה נגדית בכל אחד מן המקרים!

הוכחה ש־S_f הנו יחס שקילות שלב שלב:

רפלקסיביות יהי $a\in x$. אזי, $f(a)=f(a)$, ומכיוון ש־$\sim$ רפלקסיבי, $f(a)\sim f(a)$, ולכן $(a,a)\in S_f$.

סימטריה יהי $(a,b)\in S_f$. אזי, $f(a)\sim f(b)$. מסימטריה של $\sim$, $f(b)\sim f(a)$, ועל כן $(b,a)\in S_f$.

טרנזיטיביות יהיו $(a,b),(b,c)\in S_f$. אזי, $f(a)\sim f(b)$ וגם $f(b)\sim f(c)$. מטרנזיטיביות $\sim$, $f(a)\sim f(c)$, ועל כן $(a,c)\in S_f$.

דוגמה המראה כי S_r אינו בהכרח יחס שקילות נגדיר

$$\begin{aligned} x &= \{1,2,3\}\\ y &= \{e,\pi\}\\ r &= \{(1,e),(2,e),(2,\pi),(3,\pi)\}\\ \sim &= \{(e,e),(\pi,\pi)\}\end{aligned}$$

אזי $(1,2)\in S_r$, שכן $(1,e),(2,e)\in r$ וגם $e\sim e$, ובדומה $(2,3)\in S_r$, שכן $(2,\pi),(3,\pi)\in r$ וגם $\pi\sim\pi$. מצד שני, $(1,3)\notin S_r$, שכן אחרת היו קיימים u',v' עבורם $(1,u'),(3,v')\in r$ וגם $u'\sim v'$, אך מהתנאי האחרון נובע כי $u'=v'$, וקל לראות שלא קיים u' עבורו $(1,u'),(3,u')\in r$. לכן S_r אינו יחס שקילות במקרה זה.

6. הוכיחו כי היחסים L_η, V ו־S שהוגדרו בשאלה 6 בתרגיל הקודם הנם יחסי שקילות.

היחס L_η הוכחנו רפלקסיביות בתרגיל הקודם. נמשיך:

סימטריה נניח כי $(\alpha,\beta)\in L_\eta$. אזי: $\eta\to(\alpha\leftrightarrow\beta)$ הנו טאוטולוגיה. אך פסוק זה הנו שקול טאוטולוגית לפסוק $\eta\to(\beta\leftrightarrow\alpha)$, ולכן זה האחרון הנו טאוטולוגיה גם כן, וממילא $(\beta,\alpha)\in L_\eta$.

טרנזיטיביות נניח כי $(\alpha,\beta),(\beta,\gamma)\in L_\eta$. אזי: $\eta\to(\alpha\leftrightarrow\beta)$ הנו טאוטולוגיה וכך גם $\eta\to(\beta\leftrightarrow\gamma)$. עלינו להראות כי $\eta\to(\alpha\leftrightarrow\gamma)$ הנו טאוטולוגיה. נניח בשלילה אחרת, ונביט בהצבה כלשהי (דהיינו שורה בטבלת אמת) עבורה $\eta\to(\alpha\leftrightarrow\gamma)$ מקבל ערך שקר. אזי, בהצבה זו η מקבל ערך אמת ו־$\alpha\leftrightarrow\gamma$ מקבל ערך שקר. לכן, ערך האמת של α ושל γ שונה. אך על פי ההנחה שלנו ינבע כי תחת הצבה זו ערך האמת של α ושל β זהה, וערך האמת של β ושל γ זהה, והגענו לסתירה.

היחס V הוכחנו סימטריה בתרגיל הקודם, ורפלקסיביות הנה מיידית. נוכיח טרנזיטיביות.

טרנזיטיביות נניח כי $(a,b),(b,c) \in V$. אזי: $a-b \in \mathbb{Q}$ וגם $b-c \in \mathbb{Q}$. נרשום $a-b=q_1$, $b-c=q_2$, ונחבר את שתי המשוואות. נקבל: $a-c=q_1-q_2 \in \mathbb{Q}$, ולכן $(a,c) \in V$.

היחס S הוכחנו טרנזיטיביות בתרגיל הקודם. נוכיח רפלקסיביות וסימטריה.

רפלקסיביות תהי $\sigma \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. עלינו להראות כי $(\sigma,\sigma) \in S$. לשם כך עלינו להראות כי

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n > N \left(\left|\sigma(n) - \sigma(n)\right| < \varepsilon\right)$$

אך $\sigma(n) - \sigma(n) = 0$ לכל $n \in \mathbb{N}$, ו־$\varepsilon > 0$, ומכאן נובע הדרוש מיידית.

סימטריה יהי $(\sigma,\tau) \in S$. עלינו להראות כי $(\tau,\sigma) \in S$. מהנתון,

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n > N \left(\left|\sigma(n) - \tau(n)\right| < \varepsilon\right)$$

עלינו להראות כי

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n > N \left(\left|\tau(n) - \sigma(n)\right| < \varepsilon\right)$$

אך זה נובע מיידית מהשוויון

$$\left|\sigma(n) - \tau(n)\right| = \left|\tau(n) - \sigma(n)\right|$$

7. נסמן ב־$\mathcal{E}$ את אוסף כל יחסי השקילות על $\mathbb{N}$. נגדיר על $\mathcal{E}$ את היחס $\mathcal{R}$ הבא: $(S,T) \in \mathcal{R}$ אם ורק אם קיימת פונקציה φ הפיכה מ־$\mathbb{N}$ על עצמו, עבורה $(m,n) \in S \leftrightarrow (\varphi(m),\varphi(n)) \in T$. הוכיחו כי $\mathcal{R}$ הנו יחס שקילות.

הוכחה שלב שלב:

רפלקסיביות יהי $S \in \mathcal{E}$. עלינו להראות כי $(S,S) \in \mathcal{R}$. לשם כך, עלינו להראות כי קיימת פונקציה φ הפיכה מ־$\mathbb{N}$ על עצמו, עבורה $(m,n) \in S \leftrightarrow (\varphi(m),\varphi(n)) \in S$. פונקצית הזהות תקיים זאת.

סימטריה יהי $(S,T) \in \mathcal{R}$. עלינו להראות כי $(T,S) \in \mathcal{R}$. מההנחה, קיימת פונקציה φ הפיכה מ־$\mathbb{N}$ על עצמו, עבורה $(m,n) \in S \leftrightarrow (\varphi(m),\varphi(n)) \in T$. עלינו למצוא פונקציה ψ הפיכה מ־$\mathbb{N}$ על עצמו, עבורה $(m,n) \in T \leftrightarrow (\psi(m),\psi(n)) \in S$. הפונקציה $\psi = \varphi^{-1}$ תקיים זאת.

טרנזיטיביות יהיו $(S,T),(T,U) \in \mathcal{R}$. עלינו להראות כי $(S,U) \in \mathcal{R}$. מההנחה, קיימת פונקציה φ הפיכה מ־$\mathbb{N}$ על עצמו, עבורה $(m,n) \in S \leftrightarrow (\varphi(m),\varphi(n)) \in T$, ובנוסף קיימת פונקציה ψ הפיכה מ־$\mathbb{N}$ על עצמו, עבורה $(m,n) \in T \leftrightarrow (\psi(m),\psi(n)) \in U$. עלינו למצוא פונקציה ω הפיכה מ־$\mathbb{N}$ על עצמו, עבורה $(m,n) \in S \leftrightarrow (\omega(m),\omega(n)) \in U$. הפונקציה $\omega = \psi \circ \varphi$ תקיים זאת.

8. נסמן ב־Π את אוסף הסדרות החיוביות של ממשיים (כלומר, $\Pi = (0,\infty)^{\mathbb{N}}$), ונגדיר

$$\Theta \quad = \quad \left\{(a,b) \in \Pi^2 \mid \exists c_1, c_2 > 0 \, \exists N \in \mathbb{N} \, \forall n > N \, (c_1 b_n \le a_n \le c_2 b_n)\right\}$$

הוכיחו כי Θ הנו יחס שקילות.

הוכחה שלב שלב:

רפלקסיביות תהי $\pi \in \Pi$. עלינו להראות כי $(\pi,\pi) \in \Theta$. כלומר, עלינו להראות כי

$$\exists c_1, c_2 > 0 \, \exists N \in \mathbb{N} \, \forall n > N \, (c_1 \pi_n \le \pi_n \le c_2 \pi_n)$$

אך $c_1 = c_2 = 1$ יעידו על כך.

סימטריה יהי $(\pi,\rho) \in \Theta$. עלינו להראות כי $(\rho,\pi) \in \Theta$. מההנחה,

$$\exists c_1, c_2 > 0 \, \exists N \in \mathbb{N} \, \forall n > N \, (c_1 \rho_n \le \pi_n \le c_2 \rho_n)$$

יהיו c_1, c_2 כאמור. כלומר, עבור c_1, c_2 מתקיים

$$\exists N \in \mathbb{N} \, \forall n > N \, (c_1 \rho_n \le \pi_n \le c_2 \rho_n)$$

יהי N כאמור. אזי, לכל $n > N$ מתקיים

$$c_1 \rho_n \le \pi_n \le c_2 \rho_n$$

נבחר $d_1 = \frac{1}{c_1} > 0$, $d_2 = \frac{1}{c_2} > 0$. אזי לכל $n > N$ מתקיים

$$d_2 \pi_n \le \rho_n \le d_1 \pi_n$$

אזי d_1, d_2, N הנם עדים לכך ש־$(\rho,\pi) \in \Theta$.

טרנזיטיביות יהיו $(\pi,\rho), (\rho,\sigma) \in \Theta$. עלינו להראות כי $(\pi,\sigma) \in \Theta$. מההנחה, קיימים $c_1, c_2, d_1, d_2 > 0$ ו־$N, M \in \mathbb{N}$ עבורם

$$\forall n > N \, (c_1 \rho_n \le \pi_n \le c_2 \rho_n)$$
$$\forall n > M \, (d_1 \sigma_n \le \rho_n \le d_2 \sigma_n)$$

נבחר $P = \max\{N, M\}$, $e_1 = c_1 d_1$, $e_2 = c_2 d_2$. אזי, לכל $n > P$ מתקיים

$$e_1 \sigma_n = c_1 d_1 \sigma_n \le c_1 \rho_n \le \pi_n \le c_2 \rho_n \le c_2 d_2 \sigma_n = e_2 \sigma_n$$

אזי e_1, e_2, P הנם עדים לכך ש־$(\pi,\sigma) \in \Theta$.

9. נגדיר

$$S=\left\{((x,y),(u,v))\in\left(\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\right)^2\mid\exists\lambda\in\mathbb{R}\left((u=\lambda x)\wedge(v=\lambda y)\right)\right\}$$

הוכיחו כי S הנו יחס שקילות.

הערה הכוונה הייתה "יחס שקילות מעל $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$".

הוכחה שלב שלב:

רפלקסיביות יהי $(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$. עלינו להראות כי $((x,y),(x,y))\in S$. לשם כך עלינו להראות כי

$$\exists\lambda\in\mathbb{R}\left((x=\lambda x)\wedge(y=\lambda y)\right)$$

אך $\lambda=1$ יעיד על כך.

סימטריה יהי $((x,y),(u,v))\in S$. עלינו להראות כי $((u,v),(x,y))\in S$. מההנחה,

$$\exists\lambda\in\mathbb{R}\left((u=\lambda x)\wedge(v=\lambda y)\right)$$

יהי λ כזה. עלינו להראות כי

$$\exists\mu\in\mathbb{R}\left((x=\mu u)\wedge(y=\mu v)\right)$$

לשם כך, נשים לב כי $\lambda\neq0$, אחרת היה נובע $(u,v)=(0,0)$. אזי, עבור $\mu=\frac{1}{\lambda}$ יתקיים הדרוש.

טרנזיטיביות יהיו $((u,v),(w,x)),((w,x),(y,z))\in S$. עלינו להראות כי $((u,v),(y,z))\in S$. מההנחה, קיימים $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}$ עבורם

$$\begin{array}{ccc}(u=\lambda_1 w) & \wedge & (v=\lambda_1 x)\\ (w=\lambda_2 y) & \wedge & (x=\lambda_2 z)\end{array}$$

נבחר $\mu=\lambda_1\lambda_2$ ונקבל

$$(u=\mu y)\quad\wedge\quad(v=\mu z)$$

ומכאן הדרוש.

10. תהי x קבוצה אינסופית. נגדיר יחס $\mathcal{U}$ מעל $\mathcal{P}(x)^2$ באופן הבא:

$$\mathcal{U}=\left\{((a,b),(c,d))\in\left(\mathcal{P}(x)^2\right)^2\mid a\cup b=c\cup d\right\}$$

הוכיחו כי $\mathcal{U}$ הנו יחס שקילות.