מבוא לתורת הקבוצות - תרגיל 5

להגשה עד ליום ראשון ה־18 בדצמבר 2011

1. יהי R יחס. הסבירו מדוע הטענה "R סימטרי" שקולה לטענה "$R=R^{-1}$".
2. נגדיר את היחסים R,S על $\mathbb{Z}$ באופן הבא:
   - aRb אם ורק אם $5\mid a-b$
   - aSb אם ורק אם $5\mid a+b$

   הוכיחו כי R הנו יחס שקילות. האם $R\cup S$ הנו יחס שקילות? הוכיחו את תשובתכם!
3. יהיו R,S יחסי שקילות מעל קבוצה x (לא ריקה) כלשהי. הוכיחו או הפריכו כל אחת מן הטענות הבאות:

   (א) $R\cap S$ הנו יחס שקילות מעל x (ב) $R\cup S$ הנו יחס שקילות מעל x
4. הוכיחו כי יחס רפלקסיבי הנו מעגלי[1] אם ורק אם הוא יחס שקילות.
5. יהיו x,y קבוצות לא ריקות, תהי $f:x\to y$ פונקציה ויהי $r\subseteq x\times y$ יחס עבורו $\mathrm{dom} r=x$. יהי $\sim$ יחס שקילות כלשהו על y. נגדיר את היחסים הבאים:

$$\begin{aligned} S_f &= \left\{(u,v)\in x^2 \mid f(u)\sim f(v)\right\} \\ S_r &= \left\{(u,v)\in x^2 \mid \exists u',v'\left(\left((u,u'),(v,v')\in r\right)\wedge (u'\sim v')\right)\right\} \end{aligned}$$

   האם S_f הנו בהכרח יחס שקילות מעל x? האם S_r הנו בהכרח יחס שקילות מעל x? הוכיחו או מצאו דוגמה נגדית בכל אחד מן המקרים!
6. הוכיחו כי היחסים L_η, V ו־S שהוגדרו בשאלה 6 בתרגיל הקודם הנם יחסי שקילות.
7. נסמן ב־$\mathcal{E}$ את אוסף כל יחסי השקילות על $\mathbb{N}$. נגדיר על $\mathcal{E}$ את היחס $\mathcal{R}$ הבא: $(S,T)\in\mathcal{R}$ אם ורק אם קיימת פונקציה φ הפיכה מ־$\mathbb{N}$ על עצמו, עבורה $(m,n)\in S\leftrightarrow(\varphi(m),\varphi(n))\in T$. הוכיחו כי $\mathcal{R}$ הנו יחס שקילות.
8. נסמן ב־Π את אוסף הסדרות החיוביות של ממשיים (כלומר, $\Pi=(0,\infty)^{\mathbb{N}}$), ונגדיר

$$\Theta = \left\{(a,b)\in\Pi^2 \mid \exists c_1,c_2>0\,\exists N\in\mathbb{N}\,\forall n>N\left(c_1b_n\le a_n\le c_2b_n\right)\right\}$$

   הוכיחו כי Θ הנו יחס שקילות.
9. נגדיר

$$S=\left\{\left((x,y),(u,v)\right)\in\left(\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\right)^2 \mid \exists\lambda\in\mathbb{R}\left((u=\lambda x)\wedge(v=\lambda y)\right)\right\}$$

   הוכיחו כי S הנו יחס שקילות.
10. תהי x קבוצה אינסופית. נגדיר יחס $\mathcal{U}$ מעל $\mathcal{P}(x)^2$ באופן הבא:

$$\mathcal{U}=\left\{\left((a,b),(c,d)\right)\in\left(\mathcal{P}(x)^2\right)^2 \mid a\cup b=c\cup d\right\}$$

   הוכיחו כי $\mathcal{U}$ הנו יחס שקילות.

[1] הוגדר בתרגיל הקודם.