מבוא לתורת הקבוצות - תרגיל 6 - הערות

1. יהיו $f,g:x\to y$ פונקציות. עבור כל אחת מן הקבוצות הבאות, בדקו האם היא בהכרח פונקציה:

(א) $f\cup g$ (ב) $f\cap g$ (ג) $f\triangle g$

(ד) $h=\{(u,v)\in x\times y \mid \exists w\in x, z\in y\,(f(w)=v\wedge g(u)=z)\}$

הערה שימו לב שהשאלה לא הייתה מנוסחת כראוי. אופציה אחת הייתה לשאול "האם היא בהכרח פונקציה מ־x ל־y", ואופציה שנייה הייתה לשאול "האם היא בהכרח פונקציה בין שתי קבוצות כלשהן". הבחירה באופציה זו או אחרת יכולה הייתה להשפיע על התשובה.

פתרון לסעיף (ד) במילים אחרות, h הנה אוסף כל הזוגות (u,v) כך ש־u בתחום של g (כלומר ב־x) ו־v בתמונה של f (כלומר ב־$\mathrm{Im}f$). אם $|\mathrm{Im}f|>1$ זו לא תהיה פונקציה. למשל, נבחר $x=y=\{0,1\}$ ונגדיר $f=g=\mathrm{Id}_x$. נקבל $h=x\times y$, וזוהי אינה פונקציה.

2. הראו כי כל אחת מן הפונקציות הבאות הנה הפיכה, ומצאו את ההפוכה שלה:

(א) $\sigma:\mathcal{P}\left(x^2\right)\to\mathcal{P}\left(x^2\right)$, $\sigma(R)=R^{-1}$ כאשר חושבים על R כיחס

(ב) $i:\mathcal{P}(x)\to 2^x$, $i(a)=1_a$ כאשר $z\in a \iff 1_a(z)=1$

הוכחות

(א) נראה חד חד ערכיות של σ. נניח כי $\sigma(R)=\sigma(S)$. אזי: $R^{-1}=S^{-1}$. כלומר, לכל $(a,b)\in R^{-1}$ מתקיים $(a,b)\in S^{-1}$ (ולהיפך). יהי $(c,d)\in R$. אזי: $(d,c)\in R^{-1}$. לכן $(d,c)\in S^{-1}$, ומכאן $(c,d)\in S$. לכן $R\subseteq S$. בדומה: $S\subseteq R$. מכאן: $R=S$ ו־σ חד חד ערכית.

נראה ש־σ על. יהי $T\in\mathcal{P}\left(x^2\right)$. אזי: $T^{-1}\in\mathcal{P}\left(x^2\right)$. אבל: $\sigma\left(T^{-1}\right)=\left(T^{-1}\right)^{-1}=T$, ומכאן הדרוש.

ההפוכה של σ הנה היא עצמה (הסבירו מדוע).

(ב) נראה חד חד ערכיות של i. נניח כי $i(a)=i(b)$ (עבור $a,b\in\mathcal{P}(x)$). עלינו להראות כי $a=b$ (בהכרח). מההנחה, $1_a=1_b$ (שוויון בין פונקציות ב־2^x). כלומר, לכל $z\in x$ מתקיים $1_a(z)=1_b(z)$. לפי ההגדרה של $1_a,1_b$ נובע כי

$$z\in a \iff 1_a(z)=1 \iff 1_b(z)=1 \iff z\in b$$

ולכן $a=b$, כדרוש.

נראה ש־i על. תהי $f\in 2^x$. נסמן $a_f=\{z\in x\mid f(z)=1\}$. נטען כי $i(a_f)=1_{a_f}=f$. אכן:

$$1_{a_f}(z)=1 \iff z\in a_f \iff f(z)=1$$

ומכאן הדרוש.

ההפוכה של i הנה $j:2^x\to\mathcal{P}(x)$ המחזירה לכל $f\in 2^x$ את a_f כפי שהוגדרה לעיל.

3. עבור כל אחת מן הפונקציות $f,g,h:\mathcal{P}\left(\mathbb{Q}\right)\to\mathcal{P}\left(\mathbb{Q}\right)$ הבאות, החליטו האם היא חד חד ערכית, האם היא על, והאם היא מונוטונית. אם היא הפיכה, מצאו את ההפוכה שלה.

(א) $f\left(x\right)=x\cup\mathbb{Z}$ (ב) $g\left(x\right)=x\cap\mathbb{Z}$ (ג) $h\left(x\right)=x\triangle\mathbb{Z}$

פתרונות

(א) שלב־שלב:

חד־חד־ערכיות f אינה חד חד ערכית, שכן $f\left(\varnothing\right)=f\left(\{1\}\right)=\mathbb{Z}$.

על f אינה על שכן לא קיימת $a\in\mathcal{P}\left(\mathbb{Q}\right)$ עבורה $f\left(a\right)=\varnothing$.

מונוטוניות f הנה מונוטונית, שכן אם $a\subseteq b$ אזי $a\cup\mathbb{Z}\subseteq b\cup\mathbb{Z}$. נוכיח זאת: יהי $q\in a\cup\mathbb{Z}$. אם $q\in a$ אזי $q\in b$ (מההנחה) ולכן $q\in b\cup\mathbb{Z}$. אם $q\in\mathbb{Z}$ אז מובן ש־$q\in b\cup\mathbb{Z}$.

הפיכות היא אינה חד חד ערכית ולכן אינה הפיכה.

(ב) שלב־שלב:

חד־חד־ערכיות g אינה חד חד ערכית, שכן $g\left(\mathbb{Q}\right)=g\left(\mathbb{Z}\right)=\mathbb{Z}$.

על g אינה על שכן לא קיימת $a\in\mathcal{P}\left(\mathbb{Q}\right)$ עבורה $g\left(a\right)=\mathbb{Q}$.

מונוטוניות g הנה מונוטונית, שכן אם $a\subseteq b$ אזי $a\cap\mathbb{Z}\subseteq b\cap\mathbb{Z}$. נוכיח זאת: יהי $q\in a\cap\mathbb{Z}$. אזי, $q\in a$ ולכן $q\in b$ (מההנחה), ובנוסף $q\in\mathbb{Z}$, ולכן $q\in b\cap\mathbb{Z}$.

הפיכות היא אינה חד חד ערכית ולכן אינה הפיכה.

(ג) שלב־שלב:

חד־חד־ערכיות h הנה חד חד ערכית. נוכיח זאת: יהיו $x,y\in\mathcal{P}\left(\mathbb{Q}\right)$, ונניח כי $h\left(x\right)=h\left(y\right)$. כלומר:

$$x\triangle\mathbb{Z}=y\triangle\mathbb{Z}$$

ומכאן

$$\begin{aligned}\left(x\triangle\mathbb{Z}\right)\triangle\mathbb{Z} &= \left(y\triangle\mathbb{Z}\right)\triangle\mathbb{Z}\\ x\triangle\left(\mathbb{Z}\triangle\mathbb{Z}\right) &= y\triangle\left(\mathbb{Z}\triangle\mathbb{Z}\right)\\ x\triangle\varnothing &= y\triangle\varnothing\\ x &= y\end{aligned}$$

ומכאן הדרוש.

על h הנה על. יהי $z\in\mathcal{P}\left(\mathbb{Q}\right)$. עלינו למצוא $x\in\mathcal{P}\left(\mathbb{Q}\right)$ עבורו $h\left(x\right)=z$. כלומר, עבורו $x\triangle\mathbb{Z}=z$. אבל $x=z\triangle\mathbb{Z}$ יקיים זאת.

מונוטוניות h אינה מונוטונית שכן $\varnothing\subseteq\mathbb{Z}$, אבל $h\left(\varnothing\right)\not\subseteq h\left(\mathbb{Z}\right)$ (למשל).

הפיכות h הנה חד חד ערכית ועל, ולכן הפיכה. למעשה, h הנה הפונקציה ההפוכה לעצמה (בדקו זאת).

4. לאילו מבין הקבוצות הבאות שייכת $\varnothing$?

(א) $\varnothing$ (ב) $\mathcal{P}(\varnothing)$ (ג) $\mathcal{P}(\{\varnothing\})$ (ד) $\varnothing^{\varnothing}$ (ה) $\varnothing^{\mathcal{P}(\varnothing)}$ (ו) $\mathcal{P}(\varnothing)^{\mathcal{P}(\varnothing)}$ (ז) $\mathcal{P}(\varnothing)^{\varnothing}$

פתרונות

(א) – לא שום דבר לא שייך ל־$\varnothing$, בפרט $\varnothing \notin \varnothing$.

(ב) – כן לכל x, $\varnothing \subseteq x$, ולכן $\varnothing \in \mathcal{P}(x)$. בפרט: $\varnothing \in \mathcal{P}(\varnothing)$.

(ג) – כן לפי האמור בסעיף הקודם, $\varnothing \in \mathcal{P}(\{\varnothing\})$.

(ד) – כן $\varnothing$ הנה פונקציה מ־$\varnothing$ ל־$\varnothing$, שכן לכל איבר ב־$\varnothing$ היא מתאימה איבר אחד ויחיד ב־$\varnothing$ (המשפט הזה מתקיים "באופן ריק").

(ה) – לא לכל x שאינה ריקה, $\varnothing^x$ הנה קבוצה ריקה. מדוע? שכן לו הייתה $f \in \varnothing^x$, היא הייתה צריכה להתאים לכל איבר ב־x איבר אחד ויחיד ב־$\varnothing$. הבעיה היא שב־x יש איברים (מספיק אחד), וב־$\varnothing$ אין, ולכן הצורך הזה לא יכול להתקיים. מכיוון ש־$\mathcal{P}(\varnothing)$ אינה ריקה (ראו סעיף ב'), נובע כי $\varnothing^{\mathcal{P}(\varnothing)} = \varnothing$. לפי סעיף א', $\varnothing$ אינה איבר בה.

(ו) – לא מכיוון ש־$\varnothing \in \mathcal{P}(\varnothing)$ (ראו סעיף ב'), כל פונקציה ב־$\mathcal{P}(\varnothing)^{\mathcal{P}(\varnothing)}$ צריכה להתאים ל־$\varnothing$ איבר כלשהו ב־$\mathcal{P}(\varnothing)$. במילים אחרות: תהי $f \in \mathcal{P}(\varnothing)^{\mathcal{P}(\varnothing)}$. אזי, f הנה אוסף של זוגות, וקיים $y \in \mathcal{P}(\varnothing)$ עבורו $(\varnothing, y) \in f$. לכן $f \neq \varnothing$, ולכן $\varnothing \notin \mathcal{P}(\varnothing)^{\mathcal{P}(\varnothing)}$.

(ז) – כן הנימוק זהה לזה שניתן בסעיף ד'.

5. נגדיר מעל $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ את שלושת היחסים הבאים. קבעו עבור כל אחד מהם האם הוא יחס שקילות או לא, ונמקו את תשובתכם:

$$\begin{aligned} R_1 &= \left\{(f,g)\in\left(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}\right)^2 \mid f\circ f = g\circ g\right\} \\ R_2 &= \left\{(f,g)\in\left(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}\right)^2 \mid f\circ g = g\circ f\right\} \\ R_3 &= \left\{(f,g)\in\left(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}\right)^2 \mid \exists x\in\mathbb{R}\left(\left|f(x)-g(x)\right|\in\mathbb{Z}\right)\right\} \end{aligned}$$

פתרונות

היחס R_1 זהו יחס שקילות, וההוכחה לכך הנה שגרתית לחלוטין.

היחס R_2 יחס זה אינו יחס שקילות, אך הוא רפלקסיבי וסימטרי, ולכן עלינו להפריך טרנזיטיביות. לשם כך נגדיר

$$\begin{aligned} f(x) &= \begin{cases} 2 & x=1 \\ 1 & x=2 \\ x & \text{otherwise} \end{cases} \\ g(x) &= \begin{cases} 4 & x=3 \\ 3 & x=4 \\ x & \text{otherwise} \end{cases} \\ h(x) &= \begin{cases} 5 & x=1 \\ 1 & x=5 \\ x & \text{otherwise} \end{cases} \end{aligned}$$

אפשר לראות ש־$f\circ g = g\circ f$, $g\circ h = h\circ g$, אבל $f\circ h \neq h\circ f$ (שכן $f\circ h(1) = f(5) = 5$ אבל $h\circ f(1) = h(2) = 2$).

היחס R_3 יחס זה אינו יחס שקילות, אך הוא רפלקסיבי וסימטרי, ולכן עלינו להפריך טרנזיטיביות. לשם כך נגדיר

$$\begin{aligned} f(x) &= \begin{cases} 0 & x=0 \\ \frac{1}{2} & x=1 \\ \frac{1}{3} & \text{otherwise} \end{cases} \\ g(x) &= \begin{cases} 0 & x=0 \\ \frac{1}{4} & x=1 \\ \frac{1}{5} & \text{otherwise} \end{cases} \\ h(x) &= \begin{cases} \frac{1}{6} & x=0 \\ \frac{1}{4} & x=1 \\ \frac{1}{7} & \text{otherwise} \end{cases} \end{aligned}$$

אפשר לראות ש־$(f,g)\in R_3$ (0 הנו עד) ו־$(g,h)\in R_3$ (1 הנו עד) אך $(f,h)\notin R_3$.

6. תהי $f : x \to y$ פונקציה כלשהי, ונגדיר $F : \mathcal{P}(x) \to \mathcal{P}(y)$ באופן הבא:

$$F(a) = f[a] := \{v \in y \mid \exists u \in a \, (f(u) = v)\}$$

(א) הוכיחו כי F מונוטונית.

הוכחה יהיו $a, b \in \mathcal{P}(x)$, $a \subseteq b$. עלינו להראות כי $F(a) \subseteq F(b)$. יהי $v \in F(a)$. כלומר, $v \in f[a]$. מכאן, קיים $u \in a$ עבורו $f(u) = v$. אבל $a \subseteq b$ ולכן $u \in b$. כלומר, קיים $u \in b$ עבורו $f(u) = v$. לכן $v \in f[b]$. כלומר $v \in F(b)$. מכאן $F(a) \subseteq F(b)$.

(ב) הוכיחו כי אם f הנה חח"ע אז F הנה חח"ע, ואם f הנה על אז F הנה על.

הוכחה כל חלק בנפרד.

חד חד ערכיות תהי f חח"ע. יהיו $a, b \in \mathcal{P}(x)$, ונניח כי $F(a) = F(b)$. עלינו להראות כי $a = b$. יהי $u \in a$. נסמן $v = f(u)$. אזי, $v \in f[a]$. לכן $v \in f[b]$. מכאן, קיים $u' \in b$ עבורו $f(u') = v$. אבל f חח"ע, ולכן $u = u'$, כלומר $u \in b$. לכן $a \subseteq b$. בדומה מראים $b \subseteq a$, ומכאן $a = b$.

על תהי f על. תהי $d \in \mathcal{P}(y)$. עלינו למצוא $c \in \mathcal{P}(x)$ עבורה $F(c) = d$. נסמן

$$c = \{u \in x \mid f(u) \in d\}$$

ונטען כי אכן $F(c) = d$. יהי $v \in d$. מכיוון ש־f על, קיים $u \in x$ עבורו $f(u) = v$. אזי, $u \in c$, ולכן $v \in f[c]$, כלומר $v \in F(c)$, ולכן $d \subseteq F(c)$. יהי עתה $v' \in F(c)$. כלומר, $v' \in f[c]$. לכן קיים $u' \in c$ עבורו $f(u') = v'$. לפי ההגדרה של c, $f(u') \in d$. כלומר: $v' \in d$, ולכן $F(c) \subseteq d$, ומכאן השוויון הדרוש.

(ג) נניח כי $a, b \in \mathcal{P}(x)$ מקיימות $a \subseteq b$. האם נובע כי $|F(a)| \leq |F(b)|$?

פתרון כן. ממונוטוניות נובע כי $F(a) \subseteq F(b)$, ומכאן אי־השוויון של העוצמות.

(ד) נניח כי $a, b \in \mathcal{P}(x)$ מקיימות $|a| \leq |b|$. האם נובע כי $|F(a)| \leq |F(b)|$?

פתרון לא. להלן דוגמה נגדית: נניח כי $x = \mathbb{R}$, $a = \mathbb{Z}$, $b = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, ונגדיר את f כך:

$$f(x) = \begin{cases} x & x \in \mathbb{Z} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

אזי: $|a| \leq |b|$, ומצד שני

$$\begin{aligned} F(a) &= f[a] = \mathbb{Z} \\ F(b) &= f[b] = \{0\} \end{aligned}$$

ולכן $|F(a)| > |F(b)|$.

7. תהי $\psi:\mathcal{P}\left(x\right)\to\mathcal{P}\left(x\right)$ פונקציה מונוטונית.

(א) נגדיר $S=\left\{ a\in\mathcal{P}\left(x\right)\mid\psi\left(a\right)\subseteq a\right\}$. הראו כי S אינה ריקה.

הוכחה $x\in S$.

(ב) נסמן $c=\bigcap S$. הוכיחו כי $\psi\left(c\right)=c$. הסיקו את <u>למת נקודת השבת</u>.

הוכחה נראה כי $\psi\left(c\right)\subseteq c$. יהי $p\in\psi\left(c\right)$. כדי להראות ש־$p\in c$, עלינו להראות כי $p\in a$ לכל $a\in S$. יהי $a\in S$ כלשהו. אזי $c\subseteq a$, וממונוטוניות $\psi\left(c\right)\subseteq\psi\left(a\right)$. לכן $p\in\psi\left(a\right)$. אבל $\psi\left(a\right)\subseteq a$ (כי $a\in S$) ולכן $p\in a$, כדרוש.
עתה נראה כי $c\subseteq\psi\left(c\right)$. ראינו כי $\psi\left(c\right)\subseteq c$. ממונוטוניות, $\psi\left(\psi\left(c\right)\right)\subseteq\psi\left(c\right)$. לכן $\psi\left(c\right)\in S$, ומכאן $c\subseteq\psi\left(c\right)$, כדרוש. משתי ההכלות הללו נובע כי $\psi\left(c\right)=c$, ומכאן נובעת למת נקודת השבת.

8. תהי $A\subseteq\mathbb{N}$ אינסופית. הוכיחו כי $|A|=|\mathbb{N}|$.

הוכחה לפי משפט שנלמד בכיתה, מאינסופיות A נובע כי קיימת $C\subseteq A$ בת מניה. לכן:

$$\aleph_{0}=|C|\leq|A|\leq|\mathbb{N}|=\aleph_{0}$$

ומכאן ש־A בת מניה.

9. מצאו פונקציה $f:[0,1]\to[0,1]$ המקבלת כל ערך בטווח בדיוק פעמיים.
⋆ הוכיחו כי לא קיימת f כזו שהנה רציפה (דרוש ידע בחדו"א).

דוגמה נסמן

$$P=\left\{\frac{1}{2^{n+2}}\mid n\in\omega\right\}$$

ונגדיר את f באופן הבא:

$$f\left(x\right)=\begin{cases}4x & x\in P\\ 2x & x\in\left[0,\frac{1}{2}\right)\setminus P\\ 2x-1 & x\in\left[\frac{1}{2},1\right]\end{cases}$$

יהי $y\in[0,1]$. עלינו להוכיח שקיימים x_1,x_2 שונים זה מזה ויחידים עבורם $f\left(x_1\right)=f\left(x_2\right)=y$. נבחין בין שני מקרים:

מקרה א' קיים $n\in\omega$ עבורו $y=\frac{1}{2^n}$. אזי, $x_1=\frac{1}{2^{n+2}}\in P$ מקיים $f\left(x_1\right)=4x_1=\frac{1}{2^n}=y$ (ו־x_1 הנו היחיד ב־P המקיים זאת). כמו כן, $x_2=\frac{y+1}{2}>\frac{1}{2}$ מקיים $f\left(x_2\right)=2x_2-1=y$ (ו־x_2 הנו היחיד ב־$\left[\frac{1}{2},1\right]$ המקיים זאת). נראה כי לא קיים $x_3\in\left[0,\frac{1}{2}\right)\setminus P$ המקיים $f\left(x_3\right)=y$. אכן, לו היה קיים כזה, היה מתקיים $2x_3=y$, ולכן $x_3=\frac{y}{2}=\frac{1}{2^{n+1}}$. מכיוון ש־$x_3\notin P$, $n=0$. מכאן: $y=1$, ולכן $x_3=\frac{1}{2}$, סתירה.
מקרה ב' לא קיים $n\in\omega$ עבורו $y=\frac{1}{2^n}$. אזי, לא קיים $x_3\in P$ עבורו $f\left(x_3\right)=y$. נבחר $x_1=\frac{y}{2}$; אזי, $x_1\in\left[0,\frac{1}{2}\right)$ (שכן $y\neq 1$) ולכן $f\left(x_1\right)=2x_1=y$ (ו־x_1 הנו היחיד ב־$\left[0,\frac{1}{2}\right)$ המקיים זאת). כמו כן, $x_2=\frac{y+1}{2}>\frac{1}{2}$ מקיים $f\left(x_2\right)=2x_2-1=y$ (ו־x_2 הנו היחיד ב־$\left[\frac{1}{2},1\right]$ המקיים זאת). מכאן הדרוש.

הערה f שעונה על הדרישות הללו אינה יכולה להיות רציפה. הסיבה נעוצה במשפט ערך הביניים. תלמידי חדו"א - נסו להוכיח זאת.

10. האם קיים בקבוצת קנטור מספר לא רציונלי?

תשובה כן, כמובן. אחרת, $\mathrm{Can}\subseteq\mathbb{Q}$, וזה לא הגיוני שכן $|\mathrm{Can}|=2^{\aleph_0}$ אבל $|\mathbb{Q}|=\aleph_0$.