

מבוא לתורת הקבוצות – תרגיל 6

להגשה עד ליום רביעי ה-28 בדצמבר 2011

1. יהיו $f, g : x \rightarrow y$ פונקציות. עבור כל אחת מן הקבוצות הבאות, בדקו האם היא בהכרח פונקציה:

$$(א) f \cup g \quad (ב) f \cap g \quad (ג) f \Delta g$$

$$(ד) h = \{(u, v) \in x \times y \mid \exists w \in x, z \in y (f(w) = v \wedge g(u) = z)\}$$

2. הראו כי כל אחת מן הפונקציות הבאות הנה הפיכה, ומצאו את ההפוכה שלה:

$$(א) \sigma : \mathcal{P}(x^2) \rightarrow \mathcal{P}(x^2), \sigma(R) = R^{-1} \text{ כאשר חושבים על } R \text{ כיחס}$$

$$(ב) i : \mathcal{P}(x) \rightarrow 2^x \text{ כאשר } i(a) = 1_a \text{ כאשר } 1_a(z) = 1 \iff z \in a$$

3. עבור כל אחת מן הפונקציות $f, g, h : \mathcal{P}(\mathbb{Q}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{Q})$ הבאות, החליטו האם היא חד חד ערכית, האם היא על, והאם היא מונוטונית. אם היא הפיכה, מצאו את ההפוכה שלה.

$$(א) f(x) = x \cup \mathbb{Z} \quad (ב) g(x) = x \cap \mathbb{Z} \quad (ג) h(x) = x \Delta \mathbb{Z}$$

4. לאילו מבין הקבוצות הבאות שייכת \emptyset ?

$$(א) \emptyset \quad (ב) \mathcal{P}(\emptyset) \quad (ג) \mathcal{P}(\{\emptyset\}) \quad (ד) \emptyset^\emptyset \quad (ה) \emptyset^{\mathcal{P}(\emptyset)} \quad (ו) \mathcal{P}(\emptyset)^{\mathcal{P}(\emptyset)} \quad (ז) \mathcal{P}(\emptyset)^\emptyset$$

5. נגדיר מעל $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ את שלושת היחסים הבאים. קבעו עבור כל אחד מהם האם הוא יחס שקילות או לא, ונמקו את תשובתכם:

$$R_1 = \{(f, g) \in (\mathbb{R}^{\mathbb{R}})^2 \mid f \circ f = g \circ g\}$$

$$R_2 = \{(f, g) \in (\mathbb{R}^{\mathbb{R}})^2 \mid f \circ g = g \circ f\}$$

$$R_3 = \{(f, g) \in (\mathbb{R}^{\mathbb{R}})^2 \mid \exists x \in \mathbb{R} (|f(x) - g(x)| \in \mathbb{Z})\}$$

6. תהי $f : x \rightarrow y$ פונקציה כלשהי, ונגדיר $F : \mathcal{P}(x) \rightarrow \mathcal{P}(y)$ באופן הבא:

$$F(a) = f[a] := \{v \in y \mid \exists u \in a (f(u) = v)\}$$

(א) הוכיחו כי F מונוטונית.

(ב) הוכיחו כי אם f הנה חח"ע אז F הנה חח"ע, ואם f הנה על אז F הנה על.

(ג) נניח כי $a, b \in \mathcal{P}(x)$ מקיימות $a \subseteq b$. האם נובע כי $|F(a)| \leq |F(b)|$?

(ד) נניח כי $a, b \in \mathcal{P}(x)$ מקיימות $|a| \leq |b|$. האם נובע כי $|F(a)| \leq |F(b)|$?

7. תהי $\psi : \mathcal{P}(x) \rightarrow \mathcal{P}(x)$ פונקציה מונוטונית.

(א) נגדיר $S = \{a \in \mathcal{P}(x) \mid \psi(a) \subseteq a\}$. הראו כי S אינה ריקה.

(ב) נסמן $c = \bigcap S$. הוכיחו כי $\psi(c) = c$. הסיקו את למת נקודת השבת.

8. תהי $A \subseteq \mathbb{N}$ אינסופית. הוכיחו כי $|A| = |\mathbb{N}|$.

9. מצאו פונקציה $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ המקבלת כל ערך בטווח בדיוק פעמיים.

* הוכיחו כי לא קיימת f כזו שהנה רציפה (דרוש ידע בחדו"א).

10. האם קיים בקבוצת קנטור מספר לא רציונלי?

הכנה לתרגול הבא (לא להגשה)

- מצאו $|D| = \aleph_0$, $D \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$, עבורה לכל $d_1, d_2 \in D$ מתקיים $|d_1 \Delta d_2| < \aleph_0$.
- נסמן

$$2^{<\omega} = \bigcup_{n \in \omega} 2^n$$

הוכיחו כי $|2^{<\omega}| = \aleph_0$.

* מצאו פונקציה שקילות $\omega \rightarrow 2^{<\omega}$. τ