מבוא לתורת הקבוצות – תרגיל 7 – הערות

1. חשבו את עוצמת כל אחת מבין הקבוצות הבאות:

(א) קבוצת הסדרות הבינאריות שאינן מכילות את הרצף 00

(ב) קבוצת הסדרות הבינאריות שאינן מכילות את הרצף 01

(ג) קבוצת הסדרות הבינאריות שאינן מכילות את הרצף 011

(ד) קבוצת הסדרות הבינאריות שאינן מכילות את הרצף 00 וגם לא את הרצף 11

(ה) קבוצת הסדרות הבינאריות שהן 0 בכל המקומות הזוגיים

(ו) קבוצת הסדרות הבינאריות שהן מחזוריות החל ממקום מסוים

(ז) קבוצת הסדרות הבינאריות שבכל תחילית שלהן מספר ה־1־ים גדול או שווה למספר ה־0־ים

(ח) קבוצת הסדרות הבינאריות שבכל תחילית זוגית שלהן מספר ה־1־ים שווה למספר ה־0־ים

(ט) קבוצת הסדרות החשבוניות שכל איבריהן שלמים

פתרונות ראשית נשים לב כי כל הקבוצות הללו חלקיות ל־$\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, לכן, כדי להוכיח שקבוצה מסוימת הנה מעוצמה $2^{\aleph_0}$, מספיק להראות שעוצמתה גדולה או שווה ל־$2^{\aleph_0}$.

(א) $2^{\aleph_0}$. הסבר: נסמן את הקבוצה האמורה ב־B_{00}. תהי $C=\{1,2\}^{\mathbb{N}}$. ברור כי $|C|=2^{\aleph_0}$. נגדיר $f:C\to B_{00}$ באופן הבא: עבור סדרה $\sigma\in C$, נחליף כל הופעה של 2 בהופעה של 01. ברור כי $f(\sigma)\in B_{00}$. אזי: הפונקציה $g:B_{00}\to C$ המחליפה כל הופעה של 01 בהופעה של 2 הנה הפוכה ל־f (זאת מאחר ואחרי כל 0 בכל סדרה ב־B_{00} מופיע 1), ולכן $|B_{00}|=|C|$.

פתרון אלטרנטיבי למי שפתר את סעיף (ה) – נסמן ב־B_{e1} את אוסף כל הסדרות הבינאריות שבכל המקומות הזוגיים הן 1. מסעיף (ה) נובע כי $|B_{e1}|=2^{\aleph_0}$. אבל $B_{e1}\subseteq B_{00}$ ולכן $|B_{00}|=2^{\aleph_0}$.

(ב) $\aleph_0$. הסבר: נסמן את הקבוצה האמורה ב־B_{01}. אזי: כל $\sigma\in B_{01}$ הנה סדרה שאם יש בה 0 כלשהו, אחריו מוכרחים לבוא רק 0־ים נוספים. לכן הפונקציה $f:\mathbb{N}\to B_{01}$ המוגדרת כך:

$$f(n)=\overbrace{11\cdots1}^{n\,\text{times}}000\cdots$$

הנה הפיכה, ולכן $|B_{01}|=|\mathbb{N}|$.

(ג) $2^{\aleph_0}$. הסבר: נסמן את הקבוצה האמורה ב־B_{011}. נסמן ב־B_{11} את קבוצת הסדרות הבינאריות ללא הרצף 11. ברור כי $|B_{11}|=|B_{00}|$. נשים לב גם כי $B_{11}\subseteq B_{011}$ (כי אם סדרה בינארית אינה מכילה את הרצף 11, היא אינה מכילה את הרצף 011). לכן $|B_{11}|\le|B_{011}|$ ומכאן הדרוש.

(ד) 2. הסדרות היחידות המקיימות זאת הנן $\sigma_0=010101\cdots$ ו־$\sigma_1=101010\cdots$.

(ה) $2^{\aleph_0}$. הסבר: נסמן את הקבוצה האמורה ב־B_{e0}. נגדיר $f:2^{\mathbb{N}}\to B_{e0}$ באופן הבא: לכל $\sigma\in2^{\mathbb{N}}$, אם

$$\sigma=a_0a_1a_2a_3\cdots$$

אזי

$$f(\sigma)=0a_00a_10a_20a_3\cdots$$

אזי ברור כי $f(\sigma)\in B_{e0}$. כמו כן, קל לראות שהיא הפיכה, ומכאן הדרוש.

(ו) $\aleph_0$. הסבר: נסמן את הקבוצה האמורה ב־B_p. תהי $\sigma \in B_p$. אזי, קיים מספרים טבעיים מינימליים m, n כך של־σ יש מחזור באורך m המתחיל במקום ה־n בסדרה. נסמן את המחזור הזה ב־$(p_1, \ldots, p_m)$, ואת n המקומות הראשונים בסדרה נסמן ב־$(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$. כלומר, σ נראית כך:

$$\sigma = a_0 a_1 \ldots a_{n-1} p_1 p_2 \ldots p_m p_1 \ldots p_m p_1 \ldots p_m p_1 \ldots$$

עתה נגדיר $f : B_p \to 2^{<\omega} \times 2^{<\omega}$ באופן הבא:

$$f(\sigma) = ((a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}), (p_1, p_2, \ldots, p_m))$$

אזי f הפיכה. בתרגיל הקודם ראינו כי $|2^{<\omega}| = \aleph_0$, ולכן

$$|B_p| = \left|2^{<\omega} \times 2^{<\omega}\right| = \left|2^{<\omega}\right| \cdot \left|2^{<\omega}\right| = \aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$$

כדרוש.

(ז) $2^{\aleph_0}$. הסבר: נסמן את הקבוצה האמורה ב־B_c. נסמן ב־B_{e1} את קבוצת כל הסדרות הבינאריות שהן 1 בכל המקומות הזוגיים. ברור כי $|B_{e1}| = |B_{e0}|$. נשים לב גם כי $B_{e1} \subseteq B_c$ (כי אם בסדרה מסוימת מופיע 1 בכל המקומות הזוגיים, אזי בכל תחילית שלה מספר ה־1־ים גדול או שווה למספר ה־0־ים). לכן $|B_{e1}| \leq |B_c|$ ומכאן הדרוש.

(ח) $2^{\aleph_0}$. הסבר: נסמן את הקבוצה האמורה ב־B_d. נשים לב כי אם $\sigma \in B_d$ אזי ניתן לרשום את σ כסדרה של זוגות (רצפים באורך 2)

$$\sigma = a_0 b_0 a_1 b_1 a_2 b_2 a_3 b_3$$

כאשר לכל i טבעי, $a_i b_i$ הנו הרצף 01 או הרצף 10. נגדיר העתקה $f : 2^{\mathbb{N}} \to B_d$ באופן הבא: לכל סדרה $\tau \in 2^{\mathbb{N}}$, נחליף כל מופע של 0 ברצף 01 וכל מופע של 1 ברצף 10. ניתן לראות ש־τ הפיכה (ע"י הגדרת ההפוכה שלה באופן ישיר) ועל כן $|B_d| = \left|2^{\mathbb{N}}\right|$, כדרוש.

(ט) $\aleph_0$. הסבר: נסמן את הקבוצה האמורה ב־$\mathcal{AP}$. כל סדרה ב־$\mathcal{AP}$ נקבעת באופן יחיד על ידי האיבר הראשון שלה (נאמר: a_0) והפער בין כל שני איברים (שהוא קבוע – זו ההגדרה של סדרה חשבונית. נאמר: k). לכן ההעתקה

$$f(\sigma) = (a_0, k)$$

כהעתקה מ־$\mathcal{AP}$ ל־$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ הנה העתקה הפיכה, ולכן

$$|\mathcal{AP}| = |\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}| = |\mathbb{Z}| \times |\mathbb{Z}| = \aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$$

כדרוש.

2. עבור כל אחת מן הקבוצות הבאות החליטו האם היא בהכרח סופית או בת־מניה, ונמקו:

(א) קבוצה של עיגולים (כולל פנים – $\bullet$) זרים במישור

כן. לכל עיגול במישור נתאים נקודה ב־$\mathbb{Q}^2$ הנמצאת בו (קיימת, כי $\mathbb{Q}$ צפוף ב־$\mathbb{R}$). התאמה זו הנה חד חד ערכית.

(ב) קבוצה של מעגלים (ללא פנים – $\circ$) זרים במישור

לא. למשל, אוסף המעגלים שמרכזם בראשית אינו בן־מניה, שהרי לכל ממשי חיובי ניתן להתאים מעגל סביב הראשית שזהו רדיוסו. התאמה זו הנה חד חד ערכית.

(ג) קבוצה של למניסקטות (אובייקטים מהצורה ∞) זרות במישור

כן. לכל למניסקטה במישור נוכל להתאים שתי נקודות ב־$\mathbb{Q}^2$, אחת שנמצאת באחד מאגפי הלמניסקטה, והשנייה שנמצאת באגף השני. מאחר ולכל שתי למניסקטות זרות קיים אגף באחת שזר לשני אגפי השנייה, נובע כי ההתאמה הזו הנה חד חד ערכית מאוסף הלמינסקטות ל־$\left(\mathbb{Q}^2\right)^2$.

(ד) קבוצה של ישרים זרים במישור

לא. למשל, אוסף כל הישרים המקבילים לציר ה־y אינו בן־מניה, שהרי לכל ממשי r ניתן להתאים את הישר $x=r$. התאמה זו הנה חד חד ערכית.

(ה) קבוצה של מעגלים זרים במישור, כך שלכל שני מעגלים שונים קיים אחד שרדיוסו הנו בגודל לכל היותר מחצית מהרדיוס של השני

כן. יהי C אוסף כזה. לכל $c\in C$, נסמן ב־r_c את הרדיוס שלו. נביט בקבוצה $R=\{r_c \mid c\in C\}\subseteq\mathbb{R}$. נראה כי $|R|=|C|$; אכן, הפונקציה $f:C\to R$ המוגדרת כך: $f(c)=r_c$, הנה הפיכה. נוכיח זאת.

חח"ע נניח כי $f(c_1)=f(c_2)$. אז $r_{c_1}=r_{c_2}$. אם $c_1\neq c_2$ אז נוכל להניח בלי הגבלת הכלליות ש־$r_{c_1}\leq\frac{1}{2}r_{c_2}$, וזו סתירה. לכן $c_1=c_2$.

על יהי $r\in R$. אזי, קיים $c\in C$ עבורו $r=r_c$. לכן $f(c)=r_c=r$.

לכן מספיק שנוכיח ש־R הנה בת־מניה לכל היותר. נגדיר $g:R\to\mathbb{Q}$ באופן הבא: לכל $r\in R$, נבחר $q_r\in\left(\frac{12}{13}r,\frac{13}{12}r\right)$, ונגדיר $g(r)=q_r$. נוכיח ש־g חד חד ערכית: אכן, נניח כי $g(r)=g(r')$. כלומר, $q_r=q_{r'}$. אם $r\neq r'$ אז נוכל להניח בלי הגבלת הכלליות ש־$r\leq\frac{1}{2}r'$. מצד שני,

$$q_r<\frac{13}{12}r\leq\frac{13}{24}r'<\frac{12}{13}r'<q_{r'}$$

ונקבל סתירה. לכן $r=r'$ ומכאן ש־g חד חד ערכית, וממילא $|R|\leq\aleph_0$.

3. יהיו x_1,x_2 קבוצות כך ש־$|x_1|\leq|x_2|$. הוכיחו כי $|\mathcal{P}(x_1)|\leq|\mathcal{P}(x_2)|$.

הוכחה מהנתון, קיימת $f:x_1\to x_2$ חד חד ערכית. נגדיר $F:\mathcal{P}(x_1)\to\mathcal{P}(x_2)$ באופן הבא:

$$F(a)=f[a]$$

אזי F חד חד ערכית (מדוע?) ומכאן נובע הדרוש.

4. יהיו x_1,x_2,y_1,y_2 קבוצות כך ש־$|x_1|=|x_2|$ וגם $|y_1|=|y_2|$.

(א) הוכיחו כי $|x_1^{y_1}|=|x_2^{y_2}|$.

הוכחה יהיו $f:x_1\to x_2$ ו־$g:y_1\to y_2$ הפיכות (קיימות כאלה על פי הנתון). נגדיר $\varphi:x_1^{y_1}\to x_2^{y_2}$ באופן הבא: לכל $\alpha:y_1\to x_1$ נתאים את $\varphi(\alpha)=\varphi_\alpha:y_2\to x_2$ המוגדרת כך:

$$\varphi_\alpha(z)=f\left(\alpha\left(g^{-1}(z)\right)\right)$$

(במילים אחרות: $\varphi_\alpha=f\circ\alpha\circ g^{-1}$). נוכיח ש־$\varphi$ הפיכה.

חח"ע נניח כי $\varphi(\alpha)=\varphi(\beta)$. לפי הסימונים שלנו, $\varphi_\alpha=\varphi_\beta$. לכן, לכל $z\in y_2$,

$$\begin{aligned}\varphi_\alpha(z)&=\varphi_\beta(z)\\ f\left(\alpha\left(g^{-1}(z)\right)\right)&=f\left(\beta\left(g^{-1}(z)\right)\right)\end{aligned}$$

מכיוון ש־f חד חד ערכית, נובע כי לכל $z\in y_2$

$$\alpha\left(g^{-1}(z)\right)=\beta\left(g^{-1}(z)\right)$$

מכיוון ש־g^{-1} על, נובע כי לכל $w\in y_1$ קיים $z\in y_2$ עבורו $g^{-1}(z)=w$. לכן, לכל $w\in y_1$ מתקיים

$$\alpha(w)=\alpha\left(g^{-1}(z)\right)=\beta\left(g^{-1}(z)\right)=\beta(w)$$

ולכן $\alpha=\beta$.

על תהי $\gamma:y_1\to y_2$ כלשהי. עלינו להראות כי קיימת α עבורה $\varphi(\alpha)=\gamma$. נבחר

$$\alpha=f^{-1}\circ\gamma\circ g$$

ואז

$$\varphi(\alpha)=f\circ f^{-1}\circ\gamma\circ g\circ g^{-1}=\gamma$$

כדרוש.

(ב) תהי $\mathcal{I}(y,x)$ קבוצת הפונקציות ה<u>חח"ע</u> מ־y ל־x. הוכיחו כי $|\mathcal{I}(y_1,x_1)|=|\mathcal{I}(y_2,x_2)|$.

הערה ההוכחה במקרה זה זהה לזו שבסעיף הקודם, למעט העובדה שעלינו להסביר מדוע אם α הייתה חד חד ערכית, כך תהיה גם φ_α. זה נובע מכך שהרכבה של חד חד ערכיות הנה חד חד ערכית. כך גם בשני הסעיפים הבאים.

(ג) תהי $\mathcal{S}(y,x)$ קבוצת הפונקציות מ־y <u>על</u> x. הוכיחו כי $|\mathcal{S}(y_1,x_1)|=|\mathcal{S}(y_2,x_2)|$.

(ד) תהי $\mathcal{B}(y,x)$ קבוצת הפונקציות ה<u>הפיכות</u> מ־y ל־x. הוכיחו כי $|\mathcal{B}(y_1,x_1)|=|\mathcal{B}(y_2,x_2)|$.

5. חשבו את עוצמת כל אחת מבין הקבוצות הבאות:

(א) $\mathcal{I}(\mathbb{N},\mathbb{N})$ (ב) $\mathcal{S}(\mathbb{N},\mathbb{N})$ (ג) $\mathcal{B}(\mathbb{N},\mathbb{N})$ (ד) $\mathcal{B}(\mathbb{Z},\mathbb{Q})$ (ה) $\mathcal{S}(\mathbb{N},\mathbb{R})$

חישובים

(א) נראה כי $|\mathcal{I}(\mathbb{N},\mathbb{N})| = \left|\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\right| = 2^{\aleph_0}$. מאחר ו־$\mathcal{I}(\mathbb{N},\mathbb{N}) \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, מספיק למצוא פונקציה חד חד ערכית מ־$\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ ל־$\mathcal{I}(\mathbb{N},\mathbb{N})$. נקל על עצמנו מעט: על פי סעיף (ב) של השאלה הקודמת, $\mathcal{I}(\mathbb{N},\mathbb{N}) = \mathcal{I}(\mathbb{N},\mathbb{N}\times\mathbb{N})$ (שכן $|\mathbb{N}| = |\mathbb{N}\times\mathbb{N}|$). נסמן $A = \mathcal{I}(\mathbb{N},\mathbb{N}\times\mathbb{N})$. נגדיר פונקציה $\psi : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to A$ כך: לכל $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, נגדיר $\psi(f) = \psi_f$ כאשר

$$\psi_f(n) = (n, f(n))$$

ודאו ש־ψ_f אכן ב־A! לאחר שוידאנו זאת, נראה ש־ψ הנה חד חד ערכית. אכן, נניח כי $\psi(f) = \psi(g)$. לפי הסימונים שלנו, $\psi_f = \psi_g$. כלומר, לכל n, $\psi_f(n) = \psi_g(n)$. לפי ההגדרה שלנו נובע כי לכל n,

$$(n, f(n)) = (n, g(n))$$

ובפרט $f(n) = g(n)$, ולכן $f = g$ ו־ψ חד חד ערכית, ומכאן הדרוש.

(ב) נראה כי $|\mathcal{S}(\mathbb{N},\mathbb{N})| = \left|\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\right| = 2^{\aleph_0}$. מאחר ו־$\mathcal{S}(\mathbb{N},\mathbb{N}) \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, מספיק למצוא פונקציה חד חד ערכית מ־$\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ ל־$\mathcal{S}(\mathbb{N},\mathbb{N})$. נקל על עצמנו מעט: על פי סעיף (ב) של השאלה הקודמת, $\mathcal{S}(\mathbb{N},\mathbb{N}) = \mathcal{S}(\mathbb{N}\times\mathbb{N},\mathbb{N})$ (שכן $|\mathbb{N}| = |\mathbb{N}\times\mathbb{N}|$). נסמן $B = \mathcal{S}(\mathbb{N}\times\mathbb{N},\mathbb{N})$. נגדיר פונקציה $\eta : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to B$ כך: לכל $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, נגדיר $\eta(f) = \eta_f$ כאשר

$$\eta_f(m,n) = \begin{cases} f(n) & m = n \\ n & \text{otherwise} \end{cases}$$

ודאו ש־η_f אכן ב־B! לאחר שוידאנו זאת, נראה ש־η הנה חד חד ערכית. אכן, נניח כי $\eta(f) = \eta(g)$. לפי הסימונים שלנו, $\eta_f = \eta_g$. כלומר, לכל m,n, $\eta_f(m,n) = \eta_g(m,n)$. בפרט, לכל n, $\eta_f(n,n) = \eta_g(n,n)$. לפי ההגדרה שלנו נובע כי לכל n, $f(n) = g(n)$, ולכן $f = g$ ו־η חד חד ערכית, ומכאן הדרוש.

(ג) נראה כי $|\mathcal{B}(\mathbb{N},\mathbb{N})| = \left|\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\right| = 2^{\aleph_0}$. מאחר ו־$\mathcal{B}(\mathbb{N},\mathbb{N}) \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, מספיק למצוא פונקציה חד חד ערכית מ־$\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ ל־$\mathcal{B}(\mathbb{N},\mathbb{N})$. נקל על עצמנו מעט: נמצא פונקציה חד חד ערכית מ־$2^{\mathbb{N}}$ ל־$\mathcal{B}(\mathbb{N},\mathbb{N})$ (הרי $\left|2^{\mathbb{N}}\right| = \left|\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\right|$). נגדיר את הפונקציה כך: לכל סדרה בינארית σ נתאים את הפונקציה ההפיכה $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ הבאה:

$$f(n) = \begin{cases} n & n = 2k,\ \sigma(k) = 0 \\ n & n = 2k+1,\ \sigma(k) = 0 \\ n+1 & n = 2k,\ \sigma(k) = 1 \\ n-1 & n = 2k+1,\ \sigma(k) = 1 \end{cases}$$

אני משאיר לכם להבין את f ולהסביר מדוע ההתאמה הזו הנה חד חד ערכית. עם זאת, שימו לב להערה החשובה הבאה:

הערה חשובה מ־(ג) ניתן להסיק בקלות את (א) ו־(ב) מבלי לבצע חישוב נוסף! (כיצד?) – ובכך לחסוך את כל המאמצים של הסעיפים הקודמים.

(ד) לפי סעיף ד' של השאלה הקודמת:

$$|\mathcal{B}(\mathbb{Z},\mathbb{Q})| = |\mathcal{B}(\mathbb{N},\mathbb{N})| = 2^{\aleph_0}$$

(ה) 0.