מבוא לתורת הקבוצות - תרגיל 8 - הערות

1. יהיו a,b,c קבוצות זרות ולא ריקות. הוכיחו את "כללי החזקות" הבאים:
(א) $\left|a^b \times a^c\right| = \left|a^{b\cup c}\right|$ (ב) $\left|a^c \times b^c\right| = \left|(a\times b)^c\right|$

הערות

(א) נגדיר $\varphi : a^b \times a^c \to a^{b\cup c}$ באופן הבא: לכל $(f,g)\in a^b\times a^c$, נגדיר $\varphi(f,g) = f\cup g$.
בשלב זה יש לוודא ש־$f\cup g$ הנה פונקציה מ־$b\cup c$ ל־a, וש־φ הנה הפיכה.

(ב) נגדיר $\psi : a^c\times b^c \to (a\times b)^c$ באופן הבא: לכל $(f,g)\in a^c\times b^c$, נסמן $\psi(f,g) = \psi_{f,g}$: $c\to a\times b$ המוגדרת כך:

$$\psi_{f,g}(z) = (f(z), g(z))$$

בשלב זה יש לוודא ש־$(f(z),g(z))\in a\times b$, וש־ψ הפיכה.

2. עבור כל אחת מן הקבוצות הבאות, החליטו האם ייתכן כי היא מכסה את המישור:

(א) $\mathcal{C}_1$ - קבוצה בת מניה של עיגולים (כולל פנים - •) במישור

כן. למשל, אוסף העיגולים בעלי רדיוס טבעי שמרכזם בראשית מכסה את המישור.

(ב) $\mathcal{C}_2$ - קבוצה בת מניה של מעגלים (ללא פנים - ○) במישור

לא. נשתמש בעובדה שכל מעגל במישור חותך את ציר ה־y לכל היותר פעמיים. נסמן ב־P את אוסף נקודות החיתוך של מעגלים מ־$\mathcal{C}_2$ עם ציר ה־y. נביט בפונקציה $f: P\to \mathcal{C}_1\times 2$ המתאימה לכל נקודת חיתוך זוג (c,i) כאשר c הנו מעגל כלשהו שהיא נמצאת עליו ו־$i=0$ אם מדובר בנקודת החיתוך הנמוכה של c עם ציר ה־y, או $i=1$ אם זו נקודת החיתוך הגבוהה של c עם ציר ה־y (אם יש רק אחת, נאמר שהיא הנמוכה). נראה ש־f חד חד ערכית. אכן, נניח כי $f(p_1)=f(p_2)$. אזי, p_1,p_2 נמצאות על אותו המעגל, ושתיהן מהוות את נקודת החיתוך הנמוכה שלו עם ציר ה־y, או ששתיהן מהוות את נקודת החיתוך הגבוהה שלו עם ציר ה־y, ועל כן הן אותה הנקודה. מכאן

$$|P| \le |\mathcal{C}_1\times 2| = \aleph_0$$

ולכן $\mathcal{C}_1$ אינה מכסה את ציר ה־y, וממילא לא את המישור.

(ג) $\mathcal{C}_3$ - קבוצה (מעוצמה כלשהי) של מעגלים במישור

כן. למשל, אוסף כל המעגלים שמרכזם בראשית, בנוסף למעגל כלשהו העובר בראשית, מכסה את המישור.

3. על קבוצה $A\subseteq\mathbb{R}^2$ נאמר שהיא <u>קבוצה בדידה</u>, אם לכל $a\in A$ קיים $\delta>0$ עבורו כל $b\in A$ השונה מ־a נמצאת במרחק גדול מ־δ מ־a. הוכיחו כי כל קבוצה בדידה במישור הנה סופית או בת מניה.

הוכחה תהי A קבוצה בדידה במישור. על פי הנתון, לכל $a\in A$ קיים $\delta>0$ עבורו כל $b\in A$ השונה מ־a נמצאת במרחק גדול מ־δ מ־a. נקרא ל־δ הנ"ל δ_a. יהי c_a עיגול שמרכזו a ורדיוסו $\delta_a/17$. אזי: $c_a\cap A=\{a\}$. נסמן

$$\mathcal{C} = \{c_a \mid a\in A\}$$

אזי, $f: A\to\mathcal{C}$ המתאימה לכל $a\in A$ את c_a הנה חד חד ערכית. כמו כן, $\mathcal{C}$ הנה אוסף של עיגולים זרים (למה?) - ולכן $|A|\le|\mathcal{C}|\le\aleph_0$ (לפי שאלה 2א' בתרגיל הקודם).

4. תהי $S\subseteq\mathbb{R}$ בת־מניה. הוכיחו כי $|\mathbb{R}\setminus S|=2^{\aleph_0}$. האם תוכלו להוכיח זאת ללא השערת הרצף?

הוכחה (בהנחת השערת הרצף) ברור כי $|\mathbb{R}\setminus S|\le 2^{\aleph_0}$, ולכן אם $|\mathbb{R}\setminus S|<2^{\aleph_0}$, $|\mathbb{R}\setminus S|\le\aleph_0$. נראה כי הנחה זו מובילה לסתירה. אכן, במקרה זה נקבל:

$$|\mathbb{R}|=|\mathbb{R}\setminus S\cup S|=|\mathbb{R}\setminus S|+|S|\le\aleph_0+\aleph_0=\aleph_0$$

וזוהי סתירה.

הוכחה (ללא שימוש בהשערת הרצף) נוכיח טענה חזקה יותר; לכל A מעוצמה $2^{\aleph_0}$ ולכל S מעוצמה $\aleph_0$ החלקית לה, מתקיים $|A\setminus S|=2^{\aleph_0}$. תהי $F:A\to\mathbb{R}^2$ הפיכה, ונסמן $S'=F[S]$. אזי, $S'\subseteq\mathbb{R}^2$ והיא בת־מניה. נסמן

$$\pi(S')=\{x\in\mathbb{R}\mid(x,y)\in S'\}$$

אזי, $|\pi(S')|\le|S'|=\aleph_0$ (למה?) - ולכן הקבוצה $C=\mathbb{R}\setminus\pi(S')$ אינה ריקה. תהי $c\in C$ כלשהי. נסמן

$$\ell_c=\{(c,y)\mid y\in\mathbb{R}\}$$

אזי $\ell_c\subseteq\mathbb{R}^2\setminus S'$ וגם $|\ell_c|=|\mathbb{R}|$ (למה?) - לכן:

$$2^{\aleph_0}=\left|\mathbb{R}^2\right|\ge\left|\mathbb{R}^2\setminus S'\right|\ge|\ell_c|=|\mathbb{R}|=2^{\aleph_0}$$

ולפי C-B נקבל את הדרוש.

הערה בהוכחה השנייה גם לא השתמשנו בבחירה (אם כי שימוש בבחירה היה מאפשר הוכחה פשוטה יותר).

5. הוכיחו כי:

(א) $\left|\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\right|=|\mathbb{R}|$

(ב) $\left|\mathbb{N}^7\times\mathbb{R}\right|=\left|\mathbb{R}^7\right|$

(ג) $\left|\mathbb{R}^{\mathbb{R}}\right|>\left|\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\right|$

(ד) $\left|\{0,1\}^{\mathbb{R}}\right|=\left|[0,1]^{\mathbb{R}}\right|$

(ה) $|\mathcal{P}(\mathbb{R})|=|\mathcal{P}(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})|$

(ו) $|\mathcal{P}(\mathbb{R})|=|\mathcal{P}(\mathbb{R})\setminus\mathcal{P}(\mathbb{Q})|$

פתרונות

(א) מתקיים

$$\left|\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\right|=\left|\left(2^{\mathbb{N}}\right)^{\mathbb{N}}\right|=\left|2^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}\right|=\left|2^{\mathbb{N}}\right|=|\mathbb{R}|$$

(ב) ראשית נשים לב כי

$$\left|\mathbb{R}^7\right|=\left|2^{\mathbb{N}\times 7}\right|=\left|2^{\mathbb{N}}\right|=|\mathbb{R}|$$

לכן מתקיים

$$\left|\mathbb{N}^7\times\mathbb{R}\right|=\left|\mathbb{N}^7\right|\times|\mathbb{R}|=\aleph_0\cdot 2^{\aleph_0}=2^{\aleph_0}=|\mathbb{R}|=\left|\mathbb{R}^7\right|$$

(ג) לפי משפט קנטור מתקיים

$$\left|\mathbb{R}^{\mathbb{R}}\right| = \left|\left(2^{\mathbb{N}}\right)^{2^{\mathbb{N}}}\right| = \left|2^{\mathbb{N}\times 2^{\mathbb{N}}}\right| = \left|2^{2^{\mathbb{N}}}\right| > \left|2^{\mathbb{N}}\right| = \left|\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\right|$$

(ד) מתקיים

$$\left|\{0,1\}^{\mathbb{R}}\right| = \left|2^{\mathbb{R}}\right| = \left|2^{2^{\mathbb{N}}}\right| = \left|\mathbb{R}^{\mathbb{R}}\right| = \left|[0,1]^{\mathbb{R}}\right|$$

(ה) לפי השאלה הקודמת, $|\mathbb{R}\smallsetminus\mathbb{Q}| = 2^{\aleph_0}$. לכן, לפי שאלה 3 בתרגיל 7,

$$|\mathcal{P}(\mathbb{R}\smallsetminus\mathbb{Q})| = |\mathcal{P}(\mathbb{R})|$$

(ו) לפי השאלה הקודמת, $|\mathbb{R}\smallsetminus\mathbb{Q}| = 2^{\aleph_0}$. נשים לב כי כל $a \subseteq \mathbb{R}\smallsetminus\mathbb{Q}$ שאינה ריקה, כוללת מספרים לא רציונליים, ולכן הנה קבוצה חלקית ל־$\mathbb{R}$ שאינה קבוצה חלקית ל־$\mathbb{Q}$. לכן,

$$\mathcal{P}(\mathbb{R}\smallsetminus\mathbb{Q}) \subseteq (\mathcal{P}(\mathbb{R})\smallsetminus\mathcal{P}(\mathbb{Q}))\cup\{\varnothing\}$$

ומכאן, לפי הסעיף הקודם,

$$|\mathcal{P}(\mathbb{R})| = |\mathcal{P}(\mathbb{R}\smallsetminus\mathbb{Q})| \leq |(\mathcal{P}(\mathbb{R})\smallsetminus\mathcal{P}(\mathbb{Q}))\cup\{\varnothing\}| = |\mathcal{P}(\mathbb{R})\smallsetminus\mathcal{P}(\mathbb{Q})| \leq |\mathcal{P}(\mathbb{R})|$$

ולפי C-B נקבל את הדרוש.

6. תהי x קבוצה.

(א) הוכיחו או הפריכו: קיימות קבוצות $y,z\in\mathcal{P}(x)$ עבורן $|y|=|z|$ אך $|x\smallsetminus y| \neq |x\smallsetminus z|$

(ב) נניח גם כי x סופית. הוכיחו או הפריכו את הטענה מהסעיף הקודם.

הערה נפלה טעות בניסוח השאלה. הכוונה הייתה להוכיח או להפריך קיומה של x עבורה קיימות y,z כאלו. בניסוח זה, ניתן להוכיח: למשל, אם $x=\mathbb{N}$, נוכל לבחור $y=\mathbb{N}$ ו־$z=\{2n \mid n\in\mathbb{N}\}$, ואז למרות ש־$|y|=|z|$, $|x\smallsetminus y| \neq |x\smallsetminus z|$. בכל מקרה, מצב כזה אינו ייתכן אם x סופית (למה?).

7. יהי k טבעי, ויהיו $x_1,\ldots,x_k$ קבוצות עבורן מתקיים $\left|\bigcup_{i=1}^{k} x_i\right| = \aleph_0$. הוכיחו כי בתנאים אלה קיים $m\in\{1,\ldots k\}$ עבורו $|x_m|=\aleph_0$.

הוכחה מכיוון שלכל $m\in\{1,\ldots,k\}$ מתקיים $x_m \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} x_k$, מתקיים $|x_m|\leq\aleph_0$. נניח בשלילה כי לכל m מתקיים $|x_m|<\aleph_0$. נסמן $|x_m| = n_m\in\mathbb{N}$. אזי $\left|\bigcup_{i=1}^{k} x_k\right| \leq \sum_{m=1}^{k} n_m < \aleph_0$, בסתירה לנתון.

8. תהי $\langle x_i \mid i\in\omega\rangle$ סדרת קבוצות מונוטונית עולה (כלומר, לכל $i\leq j$ מתקיים $x_i\subseteq x_j$). נניח כי $\left|\bigcup_{i\in\omega} x_i\right| = \aleph_0$. האם נובע כי קיים $m\in\omega$ עבורו $|x_m|=\aleph_0$?

לא בהכרח. למשל, נבחר $x_i = \{n\in\omega \mid n\leq i\}$. אזי $|x_i|<\aleph_0$ לכל $i\in\omega$, אבל

$$\bigcup_{i\in\omega} x_i = \omega$$

ולכן $\left|\bigcup_{i\in\omega} x_i\right| = \aleph_0$.