מבוא לתורת הקבוצות - תרגיל 8

להגשה עד ליום חמישי ה־12 בינואר 2012

1. יהיו a,b,c קבוצות זרות ולא ריקות. הוכיחו את "כללי החזקות" הבאים:

   (א) $\left|a^b\times a^c\right|=\left|a^{b\cup c}\right|$ (ב) $\left|a^c\times b^c\right|=\left|(a\times b)^c\right|$

2. עבור כל אחת מן הקבוצות הבאות, החליטו האם ייתכן כי היא מכסה את המישור:

   (א) $\mathcal{C}_1$ – קבוצה בת מניה של עיגולים (כולל פנים – ●) במישור

   (ב) $\mathcal{C}_2$ – קבוצה בת מניה של מעגלים (ללא פנים – ○) במישור

   (ג) $\mathcal{C}_3$ – קבוצה (מעוצמה כלשהי) של מעגלים במישור

3. על קבוצה $A\subseteq\mathbb{R}^2$ נאמר שהיא <u>קבוצה בדידה</u>, אם לכל $a\in A$ קיים $\delta>0$ עבורו כל $b\in A$ השונה מ־a נמצאת במרחק גדול מ־δ מ־a. הוכיחו כי כל קבוצה בדידה במישור הנה סופית או בת מניה.

4. תהי $S\subseteq\mathbb{R}$ בת־מניה. הוכיחו כי $|\mathbb{R}\setminus S|=2^{\aleph_0}$. האם תוכלו להוכיח זאת ללא השערת הרצף?

5. הוכיחו כי:

   (א) $\left|\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\right|=|\mathbb{R}|$ (ב) $\left|\mathbb{N}^7\times\mathbb{R}\right|=\left|\mathbb{R}^7\right|$

   (ג) $\left|\mathbb{R}^{\mathbb{R}}\right|>\left|\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\right|$ (ד) $\left|\{0,1\}^{\mathbb{R}}\right|=\left|[0,1]^{\mathbb{R}}\right|$

   (ה) $|\mathcal{P}(\mathbb{R})|=|\mathcal{P}(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})|$ (ו) $|\mathcal{P}(\mathbb{R})|=|\mathcal{P}(\mathbb{R})\setminus\mathcal{P}(\mathbb{Q})|$

6. תהי x קבוצה. הוכיחו או הפריכו:

   (א) הוכיחו או הפריכו: קיימות קבוצות $y,z\in\mathcal{P}(x)$ עבורן $|y|=|z|$ אך $|x\setminus y|\neq|x\setminus z|$

   (ב) נניח גם כי x סופית. הוכיחו או הפריכו את הטענה מהסעיף הקודם.

7. יהי k טבעי, ויהיו $x_1,\dots,x_k$ קבוצות עבורן מתקיים $\left|\bigcup_{i=1}^k x_k\right|=\aleph_0$. הוכיחו כי בתנאים אלה קיים $m\in\{1,\dots k\}$ עבורו $|x_m|=\aleph_0$.

8. תהי $\langle x_i\mid i\in\omega\rangle$ סדרת קבוצות מונוטונית עולה (כלומר, לכל $i\leq j$ מתקיים $x_i\subseteq x_j$). נניח כי $\left|\bigcup_{i\in\omega}x_i\right|=\aleph_0$. האם נובע כי קיים $m\in\omega$ עבורו $|x_m|=\aleph_0$?