מבוא לתורת הקבוצות - תרגיל 9 - הערות

1. לכל אחד מיחסי השקילות הבאים (אין צורך להוכיח שמדובר ביחס שקילות), תארו את קבוצת המנה וחשבו את עוצמתה:

(א) היחס S שהוגדר בתרגיל 5, שאלה 9, מעל $\mathbb{R}\setminus\{(0,0)\}$

פתרון נשים לב כי בכל מחלקת שקילות ישנם שני נציגים בדיוק על מעגל היחידה. נוכל לרשום את קבוצת המנה, אם כן, כך:

$$\mathbb{R}\setminus\{(0,0)\}/S=\left\{\left[\left(x,\sqrt{1-x^2}\right)\right]\mid x\in(-1,1]\right\}$$

ומכאן עוצמתה הנה עוצמת הקטע $(-1,1]$, כלומר $2^{\aleph_0}$.

(ב) היחס $P=\left\{(m,n)\in\mathbb{Z}^2\mid p(m)=p(n)\right\}$ מעל $\mathbb{Z}$, כאשר לכל $m\in\mathbb{Z}$, $p(m)$ הנו הטבעי המינימלי הגדול מ־1 המחלק את m

הערה נפלה כאן טעות קטנה בניסוח - כפי שזה רשום כעת, לא ברור מה זה $p(1)$ או $p(-1)$, ולכן הם לא עומדים ביחס עם אף אחד, ולכן P אינו ממש יחס שקילות. נניח אם כן שהיחס הוגדר מעל $\mathbb{Z}\setminus\{-1,1\}$.

פתרון לכל מספר טבעי n מתקיים $(n,p(n))\in P$, ולכן $[n]=[p(n)]$. למעשה, $p(n)$ הנו המספר החיובי המינימלי במחלקה שלו. נשים לב גם כי $p(n)$ הנו תמיד ראשוני, וכי לכל ראשוני k מתקיים $p(k)=k$. נוכל, לכן, להציג את קבוצת המנה כך:

$$\mathbb{Z}\setminus\{-1,1\}/P=\{[p]\mid p\text{ is prime}\}$$

ובפרט, עוצמת קבוצת המנה הנה $\aleph_0$ (מאחר ויש אינסוף ראשוניים).

(ג) היחס $Z=\left\{(q,r)\in\mathbb{Q}^2\mid q-r\in\mathbb{Z}\right\}$ מעל $\mathbb{Q}$

פתרון נסמן ב־$\lfloor\cdot\rfloor$ את פונקציית הערך השלם. כלומר, לכל $x\in\mathbb{R}$, $\lfloor x\rfloor$ הנו השלם המקסימלי הקטן או שווה ל־x. נסמן ב־$\{\cdot\}$ את פונקציית הערך השברי. כלומר, לכל $x\in\mathbb{R}$, נגדיר $\{x\}=x-\lfloor x\rfloor$. בפרט נקבל שלכל $q\in\mathbb{Q}$, $(q,\{q\})\in Z$. כמו כן, אם עבור q_1,q_2 מתקיים $\{q_1\}=\{q_2\}$, אזי $(q_1,q_2)\in Z$. לכן, לכל q נוכל לבחור כנציג למחלקה שלו את $\{q\}$ ולקבל

$$\begin{aligned}\mathbb{Q}/Z &= \{[\{q\}]\mid q\in\mathbb{Q}\}\\ &= \{[q]\mid q\in[0,1)\cap\mathbb{Q}\}\end{aligned}$$

ובפרט, עוצמת קבוצת המנה הנה $\aleph_0$.

פתרון יהי $q\in\mathbb{Q}$; נמצא את מחלקת השקילות שלו:

$$\begin{aligned}[q]_Z &= \{r\in\mathbb{Q}\mid(q,r)\in Z\}\\ &= \{r\in\mathbb{Q}\mid q-r\in\mathbb{Z}\}=q+\mathbb{Z}\end{aligned}$$

נגדיר $f:\mathbb{Q}\cap[0,1)\to\mathbb{Q}/Z$ באופן הבא: $f(q)=[q]_Z$. נראה ש־f חח"ע. אכן,

$$\begin{aligned}f(q_1) &= f(q_1)\\ [q_1] &= [q_2]\\ (q_1,q_2) &\in Z\\ q_1-q_2 &\in \mathbb{Z}\\ q_1 &= q_2\end{aligned}$$

ולכן f חח"ע, ולכן $\aleph_0=|\mathbb{Q}\cap[0,1)|\le|\mathbb{Q}/Z|\le|\mathbb{Q}|=\aleph_0$.

(ד) היחס V שהוגדר בתרגיל 4, שאלה 6, מעל $\mathbb{R}$

פתרון יהי $x\in\mathbb{R}$; נמצא את מחלקת השקילות שלו:

$$\begin{aligned}[x]_V &= \{y\in\mathbb{R}\mid (x,y)\in V\}\\ &= \{y\in\mathbb{R}\mid x-y\in\mathbb{Q}\}=x+\mathbb{Q}\end{aligned}$$

בפרט,

$$[0]_V=\mathbb{Q}$$

לכן $|[0]_V|=\aleph_0$. נראה כי לכל $x\in\mathbb{R}$ מתקיים $|[0]|=|[x]|$ (ובפרט, כל מחלקת שקילות הנה בת מניה). אכן:

$$\begin{aligned}\alpha_{x0}:[x] &\to [0]\\ \alpha_{x0}(y) &= y-x\end{aligned}$$

הנה פונקצית שקילות. נוכיח זאת: ראשית נשים לב כי $y-x\in[0]$. אכן: $y\in x\in\mathbb{Q}$.
חד חד ערכיות נובעת מהטיעון הבא:

$$\begin{aligned}\alpha_{x0}(y_1) &= \alpha_{x0}(y_2)\\ y_1-x &= y_2-x\\ y_1 &= y_2\end{aligned}$$

ולכל $q\in[0]$, $x+q\in[x]$ ומתקיים

$$\alpha_{x0}(x+q)=x+q-x=q$$

ולכן היא על. עתה, נניח בשלילה ש־$\mathbb{R}/V$ הנה בת־מניה. אזי:

$$|\mathbb{R}|=|[0]_V|\cdot|\mathbb{R}/V|=\aleph_0\cdot\aleph_0=\aleph_0$$

וזו סתירה. תחת הנחת אקסיומת הבחירה או השערת הרצף, $|R/V|=2^{\aleph_0}$.

(ה) היחס $D=\left\{(x,y)\in(\mathcal{P}(\mathbb{N}))^2 \mid |x|=|y|\right\}$ מעל $\mathcal{P}(\mathbb{N})$

פתרון תהי $A\in\mathcal{P}(\mathbb{N})$; נמצא את $[A]_D$. מתקיים:

$$\begin{aligned}[A]_D &= \{B\in\mathcal{P}(\mathbb{N}) \mid (A,B)\in D\}\\ &= \{B\in\mathcal{P}(\mathbb{N}) \mid |A|=|B|\}\end{aligned}$$

אנו יודעים (שאלה 8 בתרגיל 6) כי העוצמה של A הנה $n\in\mathbb{N}$ או $\aleph_0$. נוכל לבחור לכל עוצמה נציג בצורה טבעית למדי: לכל עוצמה סופית n נבחר את n כקבוצה, ועבור $\aleph_0$ נבחר את $\mathbb{N}$ כנציג. נקבל:

$$\mathcal{P}(\mathbb{N})/D=\{[\mathbb{N}],[0],[1],[2],\ldots\}$$

ובפרט $|\mathcal{P}(\mathbb{N})/D|=\aleph_0$.

(ו) $\star$ היחס $D=\left\{(x,y)\in(\mathcal{P}(\mathbb{N}))^2 \mid |x\triangle y|<\aleph_0\right\}$ מעל $\mathcal{P}(\mathbb{N})$

פתרון בתרגול ראינו ש־D הנו אכן יחס שקילות. תהי $A\in\mathcal{P}(\mathbb{N})$; נמצא את $[A]_D$. מתקיים:

$$\begin{aligned}[A]_D &= \{B\in\mathcal{P}(\mathbb{N}) \mid (A,B)\in D\}\\ &= \{B\in\mathcal{P}(\mathbb{N}) \mid |A\triangle B|<\aleph_0\}\end{aligned}$$

ננסה לברר את $|[A]_D|$. כלומר, עלינו לספור כמה B־ים שונים מ־A במספר סופי של איברים. לשם כך, יהיה קל יותר לחשוב על A כעל סדרה בינארית, שבה מופיע 1 במקום ה־n אם ורק אם $n\in A$. נקרא לסדרה הזו σ_A. אזי, $B\in[A]_D$ אם ורק אם σ_B שונה מ־σ_A במספר סופי של מקומות. האינדקסים של המקומות הללו מהווים קבוצה סופית חלקית ל־$\mathbb{N}$, ולכל קבוצה כזו מתאים B שונה. לכן, אם נסמן ב־Σ את אוסף הסדרות הבינאריות בעלות מספר סופי של 1־ים, קיימת התאמה הפיכה

$$\psi:\Sigma\to[A]_D$$

המתאימה לכל $\sigma\in\Sigma$ את הקבוצה B שמתאימה לסדרה $\sigma_B=\sigma_A+\sigma$ (כאשר החיבור הנו איבר־איבר, מודולו 2). מכיוון ש־$|\Sigma|=\aleph_0$ (נא לוודא), $|[A]_D|=\aleph_0$ (לכל A). לכן

$$\begin{aligned}|\mathcal{P}(\mathbb{N})| &= |\mathcal{P}(\mathbb{N})/D|\cdot|[A]_D|\\ 2^{\aleph_0} &= |\mathcal{P}(\mathbb{N})/D|\cdot\aleph_0\end{aligned}$$

ומכאן $|\mathcal{P}(\mathbb{N})/D|=\aleph_0$.

2. נגדיר את היחס הבא מעל $\mathbb{N}^2$[1]:

$$R = \left\{ \left((k,\ell), (m,n) \right) \in \left(\mathbb{N}^2 \right)^2 \mid k+n = \ell+m \right\}$$

(א) הוכיחו כי R הנו יחס שקילות.

(ב) הוכיחו כי בכל מחלקת שקילות ישנו איבר מהצורה $(0,n)$ (עבור $n \geq 1$) או מהצורה $(n,0)$ (עבור $n \geq 0$), וחשבו את $\left| \mathbb{N}^2 / R \right|$.

הוכחה יהי $(k,\ell) \in \mathbb{N}^2$. עלינו להוכיח כי קיים $n \geq 1$ עבורו $(0,n) \in [(k,\ell)]$ או שקיים $n \geq 0$ עבורו $(n,0) \in [(k,\ell)]$. נניח ראשית כי $k < \ell$. נסמן $n = \ell - k \geq 1$. אזי: $k+n = \ell+0$ ולכן $((k,\ell),(0,n)) \in \left(\mathbb{N}^2 \right)^2$, ולכן $(0,n) \in [(k,\ell)]$. במקרה השני, $k \geq \ell$. נסמן $n = k - \ell \geq 0$. אזי: $k+0 = \ell+n$ ולכן $((k,\ell),(n,0)) \in \left(\mathbb{N}^2 \right)^2$, ולכן $(n,0) \in [(k,\ell)]$, כדרוש.
נשים לב גם כי המחלקות $[(0,n)]$ שונות זו מזו עבור n־ים טבעיים (חיוביים) שונים, והמחלקות $[(n,0)]$ שונות זו מזו עבור n־ים טבעיים (אי־שליליים) שונים, וגם $[(n,0)] \neq [(0,m)]$ לכל $n \geq 0$ ו־$m \geq 1$ טבעיים. על כן,

$$\mathbb{N}^2 / R = \{ [(0,n)] \mid n \geq 1 \} \cup \{ [(n,0)] \mid n \geq 0 \}$$

וממילא $\left| \mathbb{N}^2 / R \right| = \aleph_0$.

(ג) נגדיר פעולת חיבור $\oplus$ על קבוצת המנה $\mathbb{N}^2 / R$ באופן הבא:

$$[(k,\ell)] \oplus [(m,n)] = [(k+m, \ell+n)]$$

הוכיחו כי $\oplus$ מוגדרת היטב. במילים אחרות, הראו כי תוצאת הפעולה הנ"ל אינה תלויה בבחירת הנציגים; כלומר, אם $(k',\ell')\, R\, (k,\ell)$ וגם $(m',n')\, R\, (m,n)$, אז

$$[(k',\ell')] \oplus [(m',n')] = [(k,\ell)] \oplus [(m,n)]$$

הוכחה נניח כי $(k',\ell')\, R\, (k,\ell)$ וגם $(m',n')\, R\, (m,n)$. עלינו להראות כי

$$[(k',\ell')] \oplus [(m',n')] = [(k,\ell)] \oplus [(m,n)]$$

כלומר, עלינו להראות כי

$$[(k'+m', \ell'+n')] = [(k+m, \ell+n)]$$

וזה שקול ל־

$$k'+m'+\ell+n = \ell'+n'+k+m$$

אך זה נובע מכך ש־

$$\begin{aligned} k'+\ell &= \ell'+k \\ m'+n &= n'+m \end{aligned}$$

(על פי הנחתנו).

[1] הניחו כי $0 \in \mathbb{N}$.

(ד) נגדיר פעולה חד־מקומית $\mathcal{S}$ על קבוצת המנה $\mathbb{N}^2/R$ באופן הבא:

$$\mathcal{S}\left([(m,n)]\right) = [(m+1,n)]$$

הוכיחו כי $\mathcal{S}$ מוגדרת היטב.

הוכחה נניח כי $(m',n')\,R\,(m,n)$. עלינו להראות כי

$$\mathcal{S}\left([(m',n')]\right) = \mathcal{S}\left([(m,n)]\right)$$

כלומר כי

$$[(m'+1,n')] = [(m+1,n)]$$

וזה שקול ל־

$$m'+1+n = n'+m+1$$

אך זה נובע מכך ש־

$$m'+n = n'+m$$

(על פי הנחתנו).

(ה) נגדיר פעולה חד־מקומית $\mathcal{N}$ על קבוצת המנה $\mathbb{N}^2/R$ באופן הבא:

$$\mathcal{N}\left([m,n]\right) = [(n,m)]$$

הוכיחו כי $\mathcal{N}$ מוגדרת היטב.

הוכחה כנ"ל.

(ו) נגדיר פונקציה $\varphi : \mathbb{N}^2/R \to \mathbb{Z}$ באופן הבא:

$$\varphi\left([m,n]\right) = m-n$$

i. הוכיחו כי φ מוגדרת היטב.

הוכחה נניח כי $(m',n')\,R\,(m,n)$. עלינו להראות כי

$$\varphi\left([m',n']\right) = \varphi\left([m,n]\right)$$

כלומר כי

$$m'-n' = m-n$$

אך זה נובע מן ההנחה.

ii. הוכיחו כי φ הנה הפיכה.

הוכחה שלב־שלב:

חד־חד־ערכיות נניח כי $\varphi\left([(k,\ell)]\right) = \varphi\left([(m,n)]\right)$. כלומר: $k-\ell = m-n$, או $k+n = m+\ell$, ולכן $((k,\ell),(m,n)) \in R$ ולכן $[(k,\ell)] = [(m,n)]$.

על יהי $z \in \mathbb{Z}$. עלינו למצוא איבר בתחום שתמונתו z. אם $z \geq 0$, $\varphi\left([(z,0)]\right) = z-0 = z$. אם $z < 0$, $\varphi\left([(0,-z)]\right) = 0-(-z) = z$.

iii. כאשר מזהים את $\mathbb{N}^2/R$ עם $\mathbb{Z}$ בעזרת φ, מהי המשמעות של הפעולות $\oplus, \mathcal{S}, \mathcal{N}$ מעל $\mathbb{Z}$?

פתרון $\oplus$ הנה חיבור, $\mathcal{S}$ הנה פעולת העוקב, $\mathcal{N}$ הנה פעולת הנגדי.

הערה ההוכחות בשאלה 3 הנן כמעט זהות.