מבוא לתורת הקבוצות – תרגיל 9

להגשה עד ליום חמישי ה־19 בינואר 2012

1. לכל אחד מיחסי השקילות הבאים (אין צורך להוכיח שמדובר ביחס שקילות), תארו את קבוצת המנה וחשבו את עוצמתה:

   (א) היחס S שהוגדר בתרגיל 5, שאלה 9, מעל $\mathbb{R} \setminus \{(0,0)\}$

   (ב) היחס $P = \left\{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 \mid p(m) = p(n)\right\}$ מעל $\mathbb{Z}$, כאשר לכל $m \in \mathbb{Z}$, $p(m)$ הנו הטבעי המינימלי הגדול מ־1 המחלק את m

   (ג) היחס $Z = \left\{(q,r) \in \mathbb{Q}^2 \mid q - r \in \mathbb{Z}\right\}$ מעל $\mathbb{Q}$

   (ד) היחס V שהוגדר בתרגיל 4, שאלה 6, מעל $\mathbb{R}$

   (ה) היחס $D = \left\{(x,y) \in (\mathcal{P}(\mathbb{N}))^2 \mid |x| = |y|\right\}$ מעל $\mathcal{P}(\mathbb{N})$

   (ו) $\star$ היחס $D = \left\{(x,y) \in (\mathcal{P}(\mathbb{N}))^2 \mid |x \triangle y| < \aleph_0\right\}$ מעל $\mathcal{P}(\mathbb{N})$

2. נגדיר את היחס הבא מעל $\mathbb{N}^2$[1]:

$$R = \left\{((k,\ell),(m,n)) \in \left(\mathbb{N}^2\right)^2 \mid k + n = \ell + m\right\}$$

   (א) הוכיחו כי R הנו יחס שקילות.

   (ב) הוכיחו כי בכל מחלקת שקילות ישנו איבר מהצורה $(0,n)$ (עבור $n \geq 1$) או מהצורה $(n,0)$ (עבור $n \geq 0$), וחשבו את $\left|\mathbb{N}^2/R\right|$.

   (ג) נגדיר פעולת חיבור $\oplus$ על קבוצת המנה $\mathbb{N}^2/R$ באופן הבא:

$$[(k,\ell)] \oplus [(m,n)] = [(k+m,\ell+n)]$$

   הוכיחו כי $\oplus$ מוגדרת היטב. במילים אחרות, הראו כי תוצאת הפעולה הנ"ל אינה תלויה בבחירת הנציגים; כלומר, אם $(k',\ell')\,R\,(k,\ell)$ וגם $(m',n')\,R\,(m,n)$, אז

$$[(k',\ell')] \oplus [(m',n')] = [(k,\ell)] \oplus [(m,n)]$$

   (ד) נגדיר פעולה חד־מקומית $\mathcal{S}$ על קבוצת המנה $\mathbb{N}^2/R$ באופן הבא:

$$\mathcal{S}([m,n]) = [(m+1,n)]$$

   הוכיחו כי $\mathcal{S}$ מוגדרת היטב.

   (ה) נגדיר פעולה חד־מקומית $\mathcal{N}$ על קבוצת המנה $\mathbb{N}^2/R$ באופן הבא:

$$\mathcal{N}([m,n]) = [(n,m)]$$

   הוכיחו כי $\mathcal{N}$ מוגדרת היטב.

   (ו) נגדיר פונקציה $\varphi : \mathbb{N}^2/R \to \mathbb{Z}$ באופן הבא:

$$\varphi([m,n]) = m - n$$

   i. הוכיחו כי φ מוגדרת היטב.

   ii. הוכיחו כי φ הנה הפיכה.

   iii. כאשר מזהים את $\mathbb{N}^2/R$ עם $\mathbb{Z}$ בעזרת φ, מהי המשמעות של הפעולות $\oplus, \mathcal{S}, \mathcal{N}$ מעל $\mathbb{Z}$?

[1] הניחו כי $0 \in \mathbb{N}$.

3. נגדיר את היחס הבא מעל $T = \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$:

$$R = \left\{ ((k,\ell),(m,n)) \in T \mid \frac{k}{\ell} = \frac{m}{n} \right\}$$

(א) הוכיחו כי R הנו יחס שקילות.

(ב) הוכיחו כי בכל מחלקת שקילות ישנו איבר מהצורה (p,q) כך ש-p,q זרים זה לזה, או את האיבר $(0,1)$, וחשבו את $|T/R|$.

(ג) נגדיר פעולת חיבור $\oplus$ על קבוצת המנה T/R באופן הבא:

$$[(k,\ell)] \oplus [(m,n)] = [(kn + \ell m, \ell n)]$$

הוכיחו כי $\oplus$ מוגדרת היטב.

(ד) נגדיר פעולת כפל $\odot$ על קבוצת המנה T/R באופן הבא:

$$[(k,\ell)] \odot [(m,n)] = [(km, \ell n)]$$

הוכיחו כי $\odot$ מוגדרת היטב.

(ה) נגדיר פונקציה $\psi : T/R \to \mathbb{Q}$ באופן הבא:

$$\psi([m,n]) = \frac{m}{n}$$

i. הוכיחו כי ψ מוגדרת היטב.

ii. הוכיחו כי ψ הנה הפיכה.

iii. כאשר מזהים את T/R עם $\mathbb{Q}$ בעזרת ψ, מהי המשמעות של הפעולות $\oplus, \odot$ מעל $\mathbb{Q}$?