תרגיל הוכיחו כי $|\mathcal{M}^+| = \left|\mathbb{N}^\mathbb{N}\right|$ כאשר $\mathcal{M}^+$ הנו אוסף כל הפונקציות המונוטוניות עולות־ממש מ־$\mathbb{N}$ לעצמו.

הוכחה נסמן ראשית ב־$\mathcal{M}$ את אוסף כל הפונקציות המונוטוניות עולות־חלש מ־$\mathbb{N}$ לעצמו. נראה כי $|\mathcal{M}^+| = |\mathcal{M}|$. מכיוון ש־$\mathcal{M}^+ \subseteq \mathcal{M}$, מספיק למצוא פונקציה חד חד ערכית $f : \mathcal{M} \to \mathcal{M}^+$. נגדיר:

$$f\left(\langle a_n \rangle\right) = \langle a_n + n \rangle$$

ונראה שהיא מוגדרת היטב וחח"ע. היא מוגדרת היטב, שכן אם $a_{n+1} \geq a_n$ אז

$$a_{n+1} + (n+1) > a_n + n$$

לגבי חח"ע: נניח כי $f\left(\langle a_n \rangle\right) = f\left(\langle b_n \rangle\right)$. אז: $\langle a_n + n \rangle = \langle b_n + n \rangle$ ומכאן נובע כי $\langle a_n \rangle = \langle b_n \rangle$.

עתה נוכיח כי $|\mathcal{M}| = \left|\mathbb{N}^\mathbb{N}\right|$. שוב, מספיק להראות פונקציה חח"ע $g : \mathbb{N}^\mathbb{N} \to \mathcal{M}$. נגדיר:

$$g\left(\langle a_n \rangle\right) = \left\langle \sum_{k=0}^{n} a_k \right\rangle$$

ראשית נראה שקיבלנו פונקציה מונוטונית חלש; אכן,

$$\sum_{k=0}^{n+1} a_k - \sum_{k=0}^{n} a_k = a_{n+1} \geq 0$$

נראה כי g חח"ע. נניח כי

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n} b_k$$

לכל n. בפרט, $a_0 = b_0$ ולכל $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} a_k - \sum_{k=0}^{n-1} a_k &= \sum_{k=0}^{n} b_k - \sum_{k=0}^{n-1} b_k \\ a_n &= b_n \end{aligned}$$

ומכאן הדרוש.