

מבוא לתורת הקבוצות – תרגיל 1 – הערות

1. נניח כי המשפטים הבאים מתוארים על ידי הפסוקים האטומיים הנתונים:

- p – הבורסה נפלה
- q – אנשים קופצים מהגג
- r – הכל אבוד
- s – הציבור מטומטם

הצרינו את הטענות הבאות בעזרת הקשרים $\neg, \rightarrow, \leftrightarrow, \vee, \wedge$ בלבד:

(א) אם הבורסה נפלה, אז הציבור מטומטם, ואם הוא אינו מטומטם, אנשים קופצים מהגג, ואם אנשים קופצים מהגג, הכל אבוד.

$$(p \rightarrow s) \wedge ((\neg s) \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \bullet$$

(ב) או שהציבור מטומטם, או שאם הבורסה נפלה או שאנשים קופצים מהגג, אז הכל אבוד.

$$s \vee ((p \vee q) \rightarrow r) \bullet$$

(ג) לא הכל אבוד! והציבור אינו מטומטם.

$$(\neg r) \wedge (\neg s) \bullet$$

2. הוכיחו כי כללי ההיסק הבאים נאותים:

$$\frac{\alpha \vee (\beta \wedge \gamma)}{\alpha \vee \gamma} \text{ (ג)} \quad \frac{\alpha \wedge (\beta \vee \gamma)}{(\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma)} \text{ (ב)} \quad \frac{\neg(\alpha \vee \beta)}{(\neg\alpha) \wedge (\neg\beta)} \text{ (א)}$$

הערה ההוכחה הנה סטנדרטית – בונים טבלת אמת של הפסוקים האטומיים α, β, γ , ומראים שבכל שורה שבה ההנחה מקבלת ערך אמת, כך גם המסקנה.

3. מבין הפסוקים הבאים, מצאו את הטאוטולוגיות והסתירות (אם יש):

$$(p \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow p) \text{ (א)}$$

• זו אינה טאוטולוגיה (כפי שההצבה $p = F, q = T$ מוכיחה) ואינה סתירה (כפי שההצבה $p = q = T$ מוכיחה).

$$(p \rightarrow q) \leftrightarrow ((\neg q) \rightarrow (\neg p)) \text{ (ב)}$$

• זו טאוטולוגיה, כפי שניתן להיווכח מטבלת אמת.

$$q \rightarrow (p \wedge (\neg p)) \text{ (ג)}$$

• זו אינה טאוטולוגיה (כפי שההצבה $p = q = T$ מוכיחה) ואינה סתירה (כפי שההצבה $p = q = F$ מוכיחה).

$$(p \wedge (\neg p)) \rightarrow q \text{ (ד)}$$

• זו טאוטולוגיה, שכן הרישא של הגרירה מקבלת תמיד F .

4. מצאו לכל אחד מן הפסוקים הבאים פסוק השקול לו טאוטולוגית, ובו הקשרים \neg , \wedge בלבד:

$$p \rightarrow (\neg q) \quad (\text{א})$$

$$\neg(p \wedge q) \bullet$$

$$p \vee q \quad (\text{ב})$$

$$\neg((\neg p) \wedge (\neg q)) \bullet$$

5. הוכיחו כי לפסוק $p \rightarrow (\neg q)$ אין פסוק השקול לו טאוטולוגית ובו הקשרים \vee , \leftrightarrow בלבד.

הוכחה עובדה שניתן להשתכנע בה די בקלות (או באינדוקציה), היא שכל פסוק ובו הקשרים \leftrightarrow ו- \vee בלבד מקבל ערך אמת עבור הצבה של ערך אמת בכל פסוקיו היסודיים. הפסוק הנתון לא מקבל ערך אמת תחת הצבה כזו, ולכן אינו שקול לאף פסוק כזה.