

מבוא לתורת הקבוצות – תרגיל 10

להגשה עד ליום רביעי ה-13 ביוני 2012 בשעה 18:00

1. האם קיים שיכון של $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}$ ב- \mathbb{Z} ? האם קיים שיכון של $\mathbb{R} + \mathbb{R}$ ב- \mathbb{R} ? אם לא – הוכיחו. אם כן – מצאו כזה.
2. יהיו α, β סודרים.
 - (א) הוכיחו כי $\alpha + \beta$ הנו סודר.
 - (ב) נניח כי β אינסופי וכי $|\alpha| < |\beta|$. הוכיחו כי $\alpha + \beta = \beta$.
 - (ג) נניח כי $\alpha \leq \beta$ וכי β סודר גבולי.
 - i. מצאו α, β אינסופיים עבורם $\alpha + \beta < \beta + \alpha$.
 - ii. מצאו α, β אינסופיים שונים עבורם $\alpha + \beta = \beta + \alpha$.
 - iii. מצאו α, β אינסופיים עבורם $\alpha + \beta > \beta + \alpha$.
3. יהי γ סודר. נניח כי לכל זוג סודרים α, β מתקיים: אם $\alpha + \gamma = \beta + \gamma$ אז $\alpha = \beta$. הוכיחו כי $\gamma \in \omega$.
4. האם חיבור סודרים הנו אסוציאטיבי? הוכיחו או הפריכו.
5. האם קיים סודר $\alpha > 0$ עבורו $\alpha + \alpha = \alpha$? הוכיחו או הפריכו.
6. נניח כי \leq סדר טוב על \mathbb{R} , ונסמן $\alpha = \text{otp}(\mathbb{R}, \leq)$ (טיפוס הסדר של \mathbb{R} לפי \leq). יהי \leq סדר טוב נוסף על \mathbb{R} (אולי זהה ל- \leq , אולי לא), ונסמן $\beta = \text{otp}(\mathbb{R}, \leq)$.
 - (א) האם בהכרח $\alpha = \beta$?
 - (ב) האם בהכרח $|\alpha| = |\beta|$?
 - (ג) מה תוכלו לומר על עוצמתו של $\alpha + \beta$?
 - (ד) האם בהכרח קיים סדר טוב \triangleleft על \mathbb{R} עבורו $\alpha + \beta = \text{otp}(\mathbb{R}, \triangleleft)$?