מבוא לתורת הקבוצות – תרגיל 2 – הערות

1. הצרינו את הטענות הבאות בעזרת הקשרים $\wedge, \vee, \leftrightarrow, \rightarrow, \neg$, הכמתים $\exists, \forall$, הסימנים $\in, =$, המספרים 0 ו־π, הקבוצות $\mathbb{R}, \mathbb{Z}$ והסימונים המתמטיים המקובלים לארבע פעולות החשבון הבסיסיות:

הערה הכוונה הייתה כמובן שמותר להשתמש גם במשתנים (למשל, $x, y, z, \ldots$).

(א) כל מספר טבעי שהוא חזקה שנייה של מספר שלם הוא גם חזקה שלישית של מספר שלם.

- $\forall x \in \mathbb{Z} \left((x \geq 0) \rightarrow \left((\exists y \in \mathbb{Z} \left(x = y \cdot y \right)) \rightarrow \left(\exists z \in \mathbb{Z} \left(x = z \cdot z \cdot z \right) \right) \right) \right)$

(ב) קיים מספר רציונלי שהשורש שלו הנו שלם.

- $\exists x \in \mathbb{R} \left((\exists y \in \mathbb{Z} \left(\exists z \in \mathbb{Z} \left(x = y/z \right) \right)) \wedge \left(\exists u \in \mathbb{Z} \left(x = u \cdot u \right) \right) \right)$

(ג) קבוצת המספרים הרציונליים מוכלת בקבוצת המספרים הממשיים השונים מ־π.

- $\forall x \in \mathbb{R} \left((\exists y \in \mathbb{Z} \left(\exists z \in \mathbb{Z} \left(x = y/z \right) \right)) \rightarrow \left(\neg \left(x = \pi \right) \right) \right)$

2. קבעו את ערך האמת של הפסוקים הבאים, ובטאו כל אחד מהם ללא שימוש בקשר השלילה:

(א) $\neg \forall x \in \mathbb{R} \exists q \in \mathbb{Q} \left((q \leq x) \wedge \forall r \in \mathbb{Q} \left(r < x \rightarrow r \leq q \right) \right)$

- ראשית נבטא אותו ללא שימוש בקשר השלילה:

$$\begin{aligned}
&\neg \forall x \in \mathbb{R} \exists q \in \mathbb{Q} \left((q \leq x) \wedge \forall r \in \mathbb{Q} \left(r < x \rightarrow r \leq q \right) \right) \\
&\exists x \in \mathbb{R} \neg \exists q \in \mathbb{Q} \left((q \leq x) \wedge \forall r \in \mathbb{Q} \left(r < x \rightarrow r \leq q \right) \right) \\
&\exists x \in \mathbb{R} \forall q \in \mathbb{Q} \neg \left((q \leq x) \wedge \forall r \in \mathbb{Q} \left(r < x \rightarrow r \leq q \right) \right) \\
&\exists x \in \mathbb{R} \forall q \in \mathbb{Q} \left((\neg (q \leq x)) \vee \left(\neg \forall r \in \mathbb{Q} \left(r < x \rightarrow r \leq q \right) \right) \right) \\
&\exists x \in \mathbb{R} \forall q \in \mathbb{Q} \left((q > x) \vee \left(\exists r \in \mathbb{Q} \neg \left(r < x \rightarrow r \leq q \right) \right) \right) \\
&\exists x \in \mathbb{R} \forall q \in \mathbb{Q} \left((q > x) \vee \left(\exists r \in \mathbb{Q} \left(r < x \wedge \left(\neg \left(r \leq q \right) \right) \right) \right) \right) \\
&\exists x \in \mathbb{R} \forall q \in \mathbb{Q} \left((q > x) \vee \left(\exists r \in \mathbb{Q} \left(r < x \wedge r > q \right) \right) \right) \\
&\exists x \in \mathbb{R} \forall q \in \mathbb{Q} \left((q > x) \vee \left(\exists r \in \mathbb{Q} \left(q < r < x \right) \right) \right)
\end{aligned}$$

ומשמעות הפסוק היא כדלהלן: קיים מספר ממשי שכל רציונלי הנו גדול ממנו, או שקטן ממנו, ובמקרה השני יש רציונלי אחר ביניהם. הפסוק הנו אמיתי – כל מספר ממשי שאינו רציונלי יעיד על כך.

(ב) $\neg\forall q \in \mathbb{Q} \exists n \in \mathbb{N} \left(q^n \in \mathbb{Z} \vee nq \in \mathbb{Z}\right)$

- ראשית נבטא אותו ללא שימוש בקשר השלילה:

$$\begin{aligned}
&\neg\forall q \in \mathbb{Q} \exists n \in \mathbb{N} \left(q^n \in \mathbb{Z} \vee nq \in \mathbb{Z}\right)\\
&\exists q \in \mathbb{Q} \neg\exists n \in \mathbb{N} \left(q^n \in \mathbb{Z} \vee nq \in \mathbb{Z}\right)\\
&\exists q \in \mathbb{Q} \forall n \in \mathbb{N} \neg\left(q^n \in \mathbb{Z} \vee nq \in \mathbb{Z}\right)\\
&\exists q \in \mathbb{Q} \forall n \in \mathbb{N} \left(\left(\neg\left(q^n \in \mathbb{Z}\right)\right) \wedge \left(\neg\left(nq \in \mathbb{Z}\right)\right)\right)\\
&\exists q \in \mathbb{Q} \forall n \in \mathbb{N} \left(q^n \notin \mathbb{Z} \wedge nq \notin \mathbb{Z}\right)
\end{aligned}$$

ומשמעות הפסוק היא כדלהלן: קיים רציונלי שלכל טבעי, אם נעלה את הרציונלי הזה בחזקת הטבעי נקבל מספר שאינו שלם, וגם אם נכפול את הרציונלי בטבעי הזה נקבל מספר שאינו שלם. הפסוק אינו אמיתי – כל רציונלי הנו מהצורה $\frac{a}{b}$ עבור a שלם ו־b טבעי, ובפרט, אם נכפול את הרציונלי ב־b, נקבל מספר שלם.

הגדרה נגדיר <u>הפרש</u> של קבוצות באופן הבא:

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$$

הגדרה נגדיר <u>הפרש סימטרי</u> של קבוצות באופן הבא:

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

3. הוכיחו כי:

(א) $A \triangle B = \varnothing$ אם ורק אם $A = B$

כיוון ראשון נניח כי $A \triangle B = \varnothing$. יהי $x \in A$. אזי: $x \notin A \triangle B$, ולכן $x \notin A \setminus B$, ולכן $x \in B$, ומכאן ש־$A \subseteq B$. בדומה: $B \subseteq A$, ולכן $A = B$.

כיוון שני נניח כי $A = B$. אזי: $A \setminus B = \varnothing$ ובדומה $B \setminus A = \varnothing$, ולכן $A \triangle B = \varnothing$.

(ב) לכל קבוצה A, $A \triangle \varnothing = A$

הוכחה יהי $x \in A$. אזי: $x \in A \setminus \varnothing$ (כי $x \notin \varnothing$) ולכן $x \in A \triangle \varnothing$. עתה, יהי $y \in A \triangle \varnothing$. מכאן: $y \in A \setminus \varnothing$ ובפרט $y \in A$. לכן: $A \triangle \varnothing = A$.

4. רשמו את $A \setminus B$ ואת $A \triangle B$ עבור הקבוצות הבאות:

(א) $A = \{X \mid (X \subseteq \mathbb{R}) \wedge (\mathbb{Q} \subseteq X)\}$, $B = \{X \mid (X \subseteq \mathbb{R}) \wedge (\neg (X \subseteq \mathbb{Q}))\}$

- יהי $X \in A \setminus B$. אזי: $\mathbb{Q} \subseteq X \subseteq \mathbb{R}$ אבל לא מתקיים $\neg (X \subseteq \mathbb{Q})$, כלומר $X \subseteq \mathbb{Q}$. מכאן: $X = \mathbb{Q}$, ולכן $A \setminus B = \{\mathbb{Q}\}$.
- יהי $X \in B \setminus A$. אזי: $X \subseteq \mathbb{R}$ אבל $\neg (X \subseteq \mathbb{Q})$, כלומר ב־$X$ יש איברים שאינם רציונליים. עם זאת, לא מתקיים $\mathbb{Q} \subseteq X$, ולכן יש איברים רציונליים שאינם ב־X. מכאן:

$$B \setminus A = \{X \subseteq \mathbb{R} \mid \exists x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \exists y \in \mathbb{Q}\, (x \in X \wedge y \notin x)\}$$

ולכן $A \triangle B$ הנה הקבוצה אליה שייכים $\mathbb{Q}$ וכל הקבוצות החלקיות ל־$\mathbb{R}$ שאינן מוכלות ב־$\mathbb{Q}$ ואינן מכילות אותו.

(ב) $A=\{q \mid q\in\mathbb{Q}\wedge 2q\in\mathbb{Z}\}$, $B=\{q \mid q\in\mathbb{Q}\wedge 3q\in\mathbb{Z}\}$

- יהי $q\in A\setminus B$. אז, $q\in\mathbb{Q}$ וגם $2q\in\mathbb{Z}$ אך $3q\notin\mathbb{Z}$. לכן $q=n+\frac{1}{2}$ עבור $n\in\mathbb{Z}$. מצד שני, כל q כזה נמצא ב־$A\setminus B$. מכאן:

$$A\setminus B=\left\{n+\frac{1}{2} \mid n\in\mathbb{Z}\right\}$$

- יהי $q\in B\setminus A$. אז, $q\in\mathbb{Q}$ וגם $3q\in\mathbb{Z}$ אך $2q\notin\mathbb{Z}$. לכן $q=n+\frac{i}{3}$ עבור $n\in\mathbb{Z}$, $i\in\{1,2\}$. מצד שני, כל q כזה נמצא ב־$B\setminus A$. מכאן:

$$A\triangle B=\left\{n+q \mid n\in\mathbb{Z},\, q\in\left\{\frac{1}{3},\frac{1}{2},\frac{2}{3}\right\}\right\}$$

5. הוכיחו או הפריכו כל אחת מן הטענות הבאות:

(א) פעולת החיסור של קבוצות ($\setminus$) הנה אסוציאטיבית (קיבוצית).

נפריך מתקיים

$$\begin{aligned}\{\varnothing\}\setminus(\{\varnothing\}\setminus\{\varnothing\}) &= \{\varnothing\}\setminus\varnothing=\{\varnothing\}\\ (\{\varnothing\}\setminus\{\varnothing\})\setminus\{\varnothing\} &= \varnothing\setminus\{\varnothing\}=\varnothing\end{aligned}$$

(ב) פעולת ההפרש הסימטרי ($\triangle$) הנה קומוטטיבית (חילופית).

נוכיח מתקיים

$$\begin{aligned}x\triangle y &= (x\setminus y)\cup(y\setminus x)\\ &= (y\setminus x)\cup(x\setminus y)=y\triangle x\end{aligned}$$

(השתמשנו בקומוטטיביות של $\cup$; זו נובעת מהקומוטטיביות של $\vee$, שנובעת מהגדרת הקשר הנ"ל).