מבוא לתורת הקבוצות – תרגיל 2

להגשה עד ליום שני, ה־2 באפריל 2012

1. הצרינו את הטענות הבאות בעזרת הקשרים $\wedge, \vee, \leftrightarrow, \rightarrow, \neg$, הכמתים $\exists, \forall$, הסימנים $\in, =$, המספרים 0 ו־π, הקבוצות $\mathbb{R}, \mathbb{Z}$ והסימונים המתמטיים המקובלים לארבע פעולות החשבון הבסיסיות:

   (א) כל מספר טבעי שהוא חזקה שנייה של מספר שלם הוא גם חזקה שלישית של מספר שלם.

   (ב) קיים מספר רציונלי שהשורש שלו הנו שלם.

   (ג) קבוצת המספרים הרציונליים מוכלת בקבוצת המספרים הממשיים השונים מ־π.

2. קבעו את ערך האמת של הפסוקים הבאים, ובטאו כל אחד מהם ללא שימוש בקשר השלילה:

   (א) $\neg\forall x \in \mathbb{R} \exists q \in \mathbb{Q} \left((q \leq x) \wedge \forall r \in \mathbb{Q} \left(r < x \rightarrow r \leq q \right) \right)$

   (ב) $\neg\forall q \in \mathbb{Q} \exists n \in \mathbb{N} \left(q^n \in \mathbb{Z} \vee nq \in \mathbb{Z} \right)$

הגדרה נגדיר הפרש של קבוצות באופן הבא:

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$$

הגדרה נגדיר הפרש סימטרי של קבוצות באופן הבא:

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

3. הוכיחו כי:

   (א) $A \triangle B = \varnothing$ אם ורק אם $A = B$

   (ב) לכל קבוצה A, $A \triangle \varnothing = A$

4. רשמו את $A \setminus B$ ואת $A \triangle B$ עבור הקבוצות הבאות:

   (א) $A = \{X \mid (X \subseteq \mathbb{R}) \wedge (\mathbb{Q} \subseteq X)\}$, $B = \{X \mid (X \subseteq \mathbb{R}) \wedge (\neg (X \subseteq \mathbb{Q}))\}$

   (ב) $A = \{q \mid q \in \mathbb{Q} \wedge 2q \in \mathbb{Z}\}$, $B = \{q \mid q \in \mathbb{Q} \wedge 3q \in \mathbb{Z}\}$

5. הוכיחו או הפריכו כל אחת מן הטענות הבאות:

   (א) פעולת החיסור של קבוצות ($\setminus$) הנה אסוציאטיבית (קיבוצית).

   (ב) פעולת ההפרש הסימטרי ($\triangle$) הנה קומוטטיבית (חילופית).