מבוא לתורת הקבוצות – תרגיל 3 – הערות

1. יהיו A, B, C קבוצות כלשהן. הוכיחו או הפריכו כל אחת מן הטענות הבאות:

(א) $(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C)$

הפרכה נניח כי $A = B = \varnothing$, $C = \mathbb{N}$. אז: אגף שמאל הנו $\mathbb{N}$ אך אגף ימין הנו $\varnothing$.

(ב) $B = C$ אם ורק אם $A \cap B = A \cap C$ וגם $A \cup B = A \cup C$

הוכחה כיוון אחד טריביאלי; נניח ש־$A \cap B = A \cap C$ וגם $A \cup B = A \cup C$. יהי $x \in B$. אז: $x \in A \cup B$ ולכן $x \in A \cup C$. נבחין בין שני מקרים:

- $x \in A$. אז: $x \in A \cap B$ ולכן $x \in A \cap C$ וממילא $x \in C$
- $x \notin A$. אז מכך ש־$x \in A \cup C$ נובע כי $x \in C$

לכן בכל מקרה $B \subseteq C$, ומסימטריה $B = C$.

(ג) $(A \times B) \times C = \varnothing$ אם ורק אם $A = \varnothing$, $B = \varnothing$ או $C = \varnothing$

הוכחה ברור כי אם אחת מן הקבוצות ריקה, המכפלה הקרטזית ריקה. נניח כי כל הקבוצות אינן ריקות. יהיו $a \in A$, $b \in B$, $c \in C$. אזי: $((a, b), c) \in (A \times B) \times C$ ולכן המכפלה אינה ריקה.

(ד) $A \times A = \varnothing$ אם ורק אם $A = \varnothing$

הוכחה דומה.

(ה) $B = C$ אם ורק אם $A \times B = A \times C$

הפרכה נבחר $A = B = \varnothing$, $C = \{\varnothing\}$, אז $A \times B = \varnothing = A \times C$ אבל $B \neq C$.

2. ענו על כל אחד מן הסעיפים הבאים בנפרד. האם קיימת קבוצה x בת 4 איברים, עבורה:

(א) לכל $a \in x$ מתקיים $a \subseteq x$

קיימת. הקבוצה $\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}\}$ מקיימת זאת.

(ב) לכל $a \subseteq x$ מתקיים $a \in x$

לא קיימת. נניח בשלילה כי קיימת, ונסמנה ב־x. לפי ההנחה, לכל $a \in \mathcal{P}(x)$ מתקיים $a \in x$, ולכן $\mathcal{P}(x) \subseteq x$, אבל ב־$\mathcal{P}(x)$ יש 16 איברים וב־x רק 4, וזו סתירה.

3. תהי x_n סדרה <u>מונוטונית יורדת</u> של קבוצות; כלומר, לכל $i < j$ מתקיים $x_j \supseteq x_i$. הוכיחו כי לסדרה x_n יש גבול, והוכיחו כי

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \bigcap_{n=0}^{\infty} x_n$$

הוכחה עלינו להראות ראשית כי הגבול קיים, כלומר כי $\overline{\lim} x_n \subseteq \underline{\lim} x_n$. יהי $a \in \overline{\lim} x_n$. בפרט, קיים k כך ש־$a \in x_k$. נראה <u>כי</u> לכל $j > k$ מתקיים $a \in x_j$, ונסיק כי $a \in \underline{\lim} x_n$. אכן, יהי $j > k$ כלשהו. מהגדרת $\overline{\lim}$, קיים $j' > j$ כך ש־$a \in x_{j'}$. ממונוטוניות, $x_j \supseteq x_{j'}$ ולכן $a \in x_j$, כדרוש.

כדי להסיק את השוויון שבשאלה, נשים לב כי אם $a \in x_k$ אז $a \in x_0$ (ממונוטוניות), ולפי מה שראינו לכל $j > 0$, $a \in x_j$, כלומר $a \in \bigcap_{n=0}^{\infty} x_n$ וקיבלנו הכלה בכיוון אחד. בכיוון השני היא טריביאלית.

4. מצאו את ה־$\underline{\lim}$ וה־$\overline{\lim}$ של סדרת הקבוצות הבאה, והחליטו אם יש לה גבול:

$$x_n = \begin{cases} [-n,0] \cup \left\{\frac{1}{n}\right\} & n \geq 7 \text{ and is odd} \\ \left(-\frac{1}{n}, n^2\right] & n \geq 4 \text{ and is even} \\ \left\{\pi, \frac{e}{17}\right\} & \text{otherwise} \end{cases}$$

פתרון הבחנה חשובה היא כי ה־$\underline{\lim}$ וה־$\overline{\lim}$ תלויים רק ב"זנב", ולכן כל מה שקורה עד $n = 7$ אינו רלוונטי. משם ואילך, האיבר 0 נמצא בכל הקבוצות בסדרה, אבל רק הוא (כל איבר שלילי יוצא בשלב זוגי כלשהו, איברים חיוביים לא נמצאים במרבית השלבים האי־זוגיים) ולכן $\underline{\lim} x_n = \{0\}$. לעומת זאת, כל מספר חיובי יופיע אינסוף פעמים במקומות זוגיים (החל ממקום מסוים) וכל מספר שלילי יופיע אינסוף פעמים במקומות אי־זוגיים (החל ממקום מסוים), ולכן $\overline{\lim} x_n = \mathbb{R}$.

5. נניח כי לכל m, n טבעיים, $x_{m,n}$ הנה קבוצה. הוכיחו כי

$$\bigcup_{m=0}^{\infty} \bigcap_{n=0}^{\infty} x_{m,n} \subseteq \bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcup_{m=0}^{\infty} x_{m,n}$$

ובדקו האם בהכרח מתקיים

$$\bigcup_{m=0}^{\infty} \bigcap_{n=0}^{\infty} x_{m,n} \subseteq \bigcap_{m=0}^{\infty} \bigcup_{n=0}^{\infty} x_{m,n}$$

(שימו לב לשינוי באינדקסים!)

פתרון יהי $a \in \bigcup_{m=0}^{\infty} \bigcap_{n=0}^{\infty} x_{m,n}$. יהי k טבעי כלשהו. מההנחה שלנו, קיים m טבעי עבורו $a \in \bigcap_{n=0}^{\infty} x_{m,n}$, ובפרט $a \in x_{m,k}$. לכן $a \in \bigcup_{\ell=0}^{\infty} x_{\ell,k}$, ומכאן הדרוש.

ההכלה השנייה אינה בהכרח מתקיימת. למשל, עבור הסדרה

$$x_{m,n} = \begin{cases} \varnothing & m = 0 \\ \{\varnothing\} & \text{otherwise} \end{cases}$$

מתקיים שאגף שמאל הנו סינגלטון ואגף ימין הנו קבוצה ריקה.