

## מבוא לתורת הקבוצות – תרגיל 3

להגשה עד ליום ראשון ה-15 באפריל 2012

1. יהיו  $A, B, C$  קבוצות כלשהן. הוכיחו או הפריכו כל אחת מן הטענות הבאות:

$$(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C) \quad (\text{א})$$

$$A \cup B = A \cup C \text{ וגם } A \cap B = A \cap C \text{ אם ורק אם } B = C \quad (\text{ב})$$

$$C = \emptyset \text{ או } B = \emptyset, A = \emptyset \text{ אם ורק אם } (A \times B) \times C = \emptyset \quad (\text{ג})$$

$$A = \emptyset \text{ אם ורק אם } A \times A = \emptyset \quad (\text{ד})$$

$$A \times B = A \times C \text{ אם ורק אם } B = C \quad (\text{ה})$$

2. ענו על כל אחד מן הסעיפים הבאים בנפרד. האם קיימת קבוצה  $x$  בת 4 איברים, עבודה:

$$a \subseteq x \text{ מתקיים } a \in x \quad (\text{א})$$

$$a \in x \text{ מתקיים } a \subseteq x \quad (\text{ב})$$

3. תהי  $x_n$  סדרה מונוטונית יורדת של קבוצות; כלומר, לכל  $i < j$  מתקיים  $x_i \supseteq x_j$ . הוכיחו כי לסדרה  $x_n$  יש גבול, והוכיחו כי

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \bigcap_{n=0}^{\infty} x_n$$

4. מצאו את ה- $\liminf$  וה- $\overline{\lim}$  של סדרת הקבוצות הבאה, והחליטו אם יש לה גבול:

$$x_n = \begin{cases} [-n, 0] \cup \{\frac{1}{n}\} & n \geq 7 \text{ and is odd} \\ (-\frac{1}{n}, n^2] & n \geq 4 \text{ and is even} \\ \{\pi, \frac{e}{17}\} & \text{otherwise} \end{cases}$$

5. נניח כי לכל  $m, n$  טבעיים, הנה קבוצה. הוכיחו כי

$$\bigcup_{m=0}^{\infty} \bigcap_{n=0}^{\infty} x_{m,n} \subseteq \bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcup_{m=0}^{\infty} x_{m,n}$$

ובדקו האם בהכרח מתקיים

$$\bigcup_{m=0}^{\infty} \bigcap_{n=0}^{\infty} x_{m,n} \subseteq \bigcap_{m=0}^{\infty} \bigcup_{n=0}^{\infty} x_{m,n}$$

(שימו לב לשינוי באינדקסים!)