מבוא לתורת הקבוצות - תרגיל 4

להגשה עד ליום ראשון ה־29 באפריל 2012

סימונים יהי R יחס כלשהו. נסמן $A = \mathrm{dom}R$, $B = \mathrm{range}R$.

- לכל $C \subseteq A$ נסמן $R[C] = \{b \in B \mid \exists c \in C, (c,b) \in R\}$
- נסמן $R^{-1} = \{(b,a) \in B \times A \mid (a,b) \in R\}$

1. יהיו A, B קבוצות ויהי $R \subseteq A \times B$ יחס. יהיו $A_1, A_2 \subseteq A$. הוכיחו כי:

(א) $R[A_1 \cup A_2] = R[A_1] \cup R[A_2]$

(ב) $R[A_1 \cap A_2] \subseteq R[A_1] \cap R[A_2]$ (הדגימו מקרה שבו מתקיימת הכלה־ממש)

(ג) $R[A_1 \setminus A_2] \supseteq R[A_1] \setminus R[A_2]$ (הדגימו מקרה שבו מתקיימת הכלה־ממש)

(ד) $R^{-1}[R[A_1]] \supseteq A_1 \cap \mathrm{dom}R$ (הדגימו מקרה שבו מתקיימת הכלה־ממש)

2. להלן טענה שקרית, והוכחה לטענה הזו. מצאו את הטעות בהוכחה.

טענה יחס סימטרי וטרנזיטיבי (מעל קבוצה x כלשהי) הנו רפלקסיבי.

הוכחה יהי R יחס סימטרי וטרנזיטיבי מעל קבוצה x. יהי $a \in x$ כלשהו. יהי $b \in x$ כזה עבורו $(a,b) \in R$. מאחר ו־R סימטרי, $(b,a) \in R$. מטרנזיטיביות נובע כי $(a,a) \in R$. על כן R רפלקסיבי.

3. הוכיחו או הפריכו כל אחת מן הטענות הבאות:

(א) יחס אנטי־סימטרי חלש ואנטי־רפלקסיבי הנו אנטי־סימטרי חזק

(ב) אם R הנו יחס אנטי־סימטרי חזק ו־$S \subseteq R$ אז S הנו יחס אנטי־סימטרי חלש

(ג) קיים יחס לא ריק R שהנו אנטי־סימטרי חלש וגם סימטרי

(ד) קיים יחס R שאינו אנטי־סימטרי חלש ואינו סימטרי

4. עבור כל אחד מן היחסים הבאים R על קבוצה נתונה A, קבעו האם הוא (א) רפלקסיבי, (ב) סימטרי, (ג) טרנזיטיבי, (ד) אנטי־רפלקסיבי, (ה) אנטי־סימטרי חלש, (ו) אנטי־סימטרי חזק, (ז) יחס שקילות:

(א) $A = \mathbb{R}$, $R = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - y \in \mathbb{N}\right\}$

(ב) $A = \mathbb{R}$, $R = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - y \in \mathbb{Z}\right\}$

(ג) $A = \mathbb{R}^2$, $R = \left\{((x_1,y_1),(x_2,y_2)) \in \left(\mathbb{R}^2\right)^2 \mid x_1 = x_2\right\}$

(ד) $A = \mathbb{R}^2$, $R = \left\{((x_1,y_1),(x_2,y_2)) \in \left(\mathbb{R}^2\right)^2 \mid x_1 \le x_2 \wedge y_1 \le y_2\right\}$

5. הוכיחו כי היחס L המכיל בדיוק את כל זוגות הפסוקים (מתחשיב הפסוקים) (α, β) עבורם הפסוק $\alpha \to \beta$ הנו טאוטולוגיה הנו יחס רפלקסיבי וטרנזיטיבי, אך אינו יחס שקילות.