מבוא לתורת הקבוצות – תרגיל 5 – הערות

1. יהי T היחס הבא מעל $\mathbb{R}\setminus\{\pi\}$:

$$(x,y)\in T \iff \neg\left((x<\pi<y)\vee(y<\pi<x)\right)$$

(א) הוכיחו כי T הנו יחס שקילות.

הערה מיידי לפי ההגדרה.

(ב) תארו את קבוצת המנה. מהו גודלה?

תיאור מתקיים $\left(\mathbb{R}\setminus\{\pi\}\right)/T=\left\{[0]_T,[4]_T\right\}$, וגודל קבוצת המנה הנו 2.

2. נגדיר את היחס הבא מעל $\mathbb{Q}$:

$$R=\left\{(q,r)\in\mathbb{Q}^2 \mid e^{2\pi iq}=e^{2\pi ir}\right\}$$

כאשר $i=\sqrt{-1}$ (שימו לב כי לכל $t\in\mathbb{R}$ מתקיים $e^{it}=\cos t+i\sin t$).

(א) הוכיחו כי R הנו יחס שקילות.

הערה מיידי לפי ההגדרה.

(ב) הוכיחו כי בכל מחלקת שקילות ישנו איבר מהקבוצה $\mathbb{Q}\cap[0,1)$.

הוכחה יהי $q\in\mathbb{Q}$. נסמן ב־r את הערך השברי של q, כלומר, q הנו הרציונלי היחיד ב־$[0,1)$ עבורו ההפרש $q-r$ הנו שלם. נראה כי $(q,r)\in R$. אכן,

$$e^{2\pi iq}=e^{2\pi i(r+(q-r))}=e^{2\pi ir}\cdot e^{2\pi i(q-r)}=e^{2\pi ir}\cdot 1=e^{2\pi ir}$$

כדרוש.

(ג) נגדיר פעולת כפל $\odot$ על קבוצת המנה $\mathbb{Q}/R$ באופן הבא:

$$[q]\odot[r]=[q+r]$$

הוכיחו כי $\odot$ מוגדרת היטב. במילים אחרות, הראו כי תוצאת הפעולה הנ"ל אינה תלויה בבחירת הנציגים; כלומר, הראו כי אם $(q_1,q_2)\in R$ וגם $(r_1,r_2)\in R$ אז

$$[q_1]\odot[r_1]=[q_2]\odot[r_2]$$

הוכחה נני כי $(q_1,q_2)\in R$ וגם $(r_1,r_2)\in R$ אז

$$\begin{aligned}[q_1]\odot[r_1] &= [q_1+r_1]\\ [q_2]\odot[r_2] &= [q_2+r_2]\end{aligned}$$

ולכן מספיק להראות כי $(q_1+r_1,q_2+r_2)\in R$. אכן,

$$e^{2\pi i(q_1+r_1)} = e^{2\pi iq_1}\cdot e^{2\pi ir_1}=e^{2\pi iq_2}\cdot e^{2\pi ir_2}=e^{2\pi i(q_2+r_2)}$$

כדרוש.

(ד) נסמן ב־U את מעגל היחידה ב־$\mathbb{C}$. כלומר: $U = \left\{e^{it} \mid t \in \mathbb{R}\right\}$. נסמן ב־$U'$ את הקבוצה של כל שורשי היחידה; כלומר,

$$U' = \{z \in U \mid \exists n \in \mathbb{N},\, z^n = 1\}$$

(הניחו כי $0 \notin \mathbb{N}$). נגדיר פונקציה $\varphi : \mathbb{Q}/R \to U'$ באופן הבא:

$$\varphi\left([q]\right) = e^{2\pi i q}$$

i. הוכיחו כי φ מוגדרת היטב. כלומר, הראו כי לכל $q \in \mathbb{Q}$, $\varphi\left([q]\right) \in U'$, וכי לכל $(q,r) \in R$, $\varphi\left([q]\right) = \varphi\left([r]\right)$.

ii. הוכיחו כי φ הנה הפיכה (כלומר, הוכיחו כי φ^{-1} הנה פונקציה מ־U' ל־$\mathbb{Q}/R$; לחליפין, הוכיחו כי φ הנה חד־חד ערכית ועל).

iii. כאשר מזהים את $\mathbb{Q}/R$ עם U' בעזרת φ, מהי המשמעות של הפעולה $\odot$ מעל U'?

הערה בתרגיל המקורי נפלה טעות דפוס, ובמקום "הניחו כי $0 \in \mathbb{N}$" התכוונתי לרשום "הניחו כי $0 \notin \mathbb{N}$". כאן זה כבר תוקן.

פתרונות

i. נובע מיד מן ההגדרה.

ii. נוכיח חד חד ערכיות של φ. יהיו $q, r \in \mathbb{Q}$ עבורם $\varphi\left([q]\right) = \varphi\left([r]\right)$. אז: $e^{2\pi i q} = e^{2\pi i r}$. לכן $[q] = [r]$, כדרוש.
נוכיח ש־φ הנה על. יהי $z \in U'$. יהי $n > 0$ טבעי מינימלי עבורו $z^n = 1$. אז, z הנו אחד מ־$n-1$ השורשים הלא־טריביאלים של 1 (במרוכבים). כלומר,

$$z \in \left\{e^{2\pi i \cdot \frac{1}{n}}, \ldots, e^{2\pi i \cdot \frac{n-1}{n}}\right\}$$

ולכן אם נסמן $z = e^{2\pi i \cdot \frac{k}{n}}$ נקבל בקלות כי $\varphi\left(\left[\frac{k}{n}\right]\right) = z$.

iii. כפל.