

מבוא לתורת הקבוצות – תרגיל 5

להגשה עד ליום ראשון ה-6 במאי 2012

1. יהי T היחס הבא מעל $\mathbb{R} \setminus \{\pi\}$:

$$(x, y) \in T \iff \neg((x < \pi < y) \vee (y < \pi < x))$$

(א) הוכיחו כי T הנו יחס שקילות.

(ב) תארו את קבוצת המנה. מהו גודלה?

2. נגדיר את היחס הבא מעל \mathbb{Q} :

$$R = \{(q, r) \in \mathbb{Q}^2 \mid e^{2\pi i q} = e^{2\pi i r}\}$$

כאשר $i = \sqrt{-1}$ (שימו לב כי לכל $t \in \mathbb{R}$ מתקיים $e^{it} = \cos t + i \sin t$).

(א) הוכיחו כי R הנו יחס שקילות.

(ב) הוכיחו כי בכל מחלקת שקילות ישנו איבר מהקבוצה $\mathbb{Q} \cap [0, 1)$.

(ג) נגדיר פעולת כפל \odot על קבוצת המנה \mathbb{Q}/R באופן הבא:

$$[q] \odot [r] = [q + r]$$

הוכיחו כי \odot מוגדרת היטב. במילים אחרות, הראו כי תוצאת הפעולה הנ"ל אינה תלויה בבחירת הנציגים; כלומר, הראו כי אם $(q_1, q_2) \in R$ וגם $(r_1, r_2) \in R$ אז

$$[q_1] \odot [r_1] = [q_2] \odot [r_2]$$

(ד) נסמן ב- U את מעגל היחידה ב- \mathbb{C} . כלומר: $U = \{e^{it} \mid t \in \mathbb{R}\}$. נסמן ב- U' את הקבוצה של כל שורשי היחידה; כלומר,

$$U' = \{z \in U \mid \exists n \in \mathbb{N}, z^n = 1\}$$

(הניחו כי $0 \in \mathbb{N}$). נגדיר פונקציה $\varphi : \mathbb{Q}/R \rightarrow U'$ באופן הבא:

$$\varphi([q]) = e^{2\pi i q}$$

i. הוכיחו כי φ מוגדרת היטב. כלומר, הראו כי לכל $q \in \mathbb{Q}$, $\varphi([q]) \in U'$, וכי לכל

$$\varphi([q]) = \varphi([r]), (q, r) \in R$$

ii. הוכיחו כי φ הנה הפיכה (כלומר, הוכיחו כי φ^{-1} הנה פונקציה מ- U' ל- \mathbb{Q}/R ; לחליפין,

הוכיחו כי φ הנה חד-חד ערכית ועל).

iii. כאשר מזהים את \mathbb{Q}/R עם U' בעזרת φ , מהי המשמעות של הפעולה \odot מעל U' ?