

מבוא לתורת הקבוצות – תרגיל 6

להגשה עד ליום ראשון ה-13 במאי 2012

1. הוכיחו או הפריכו כל אחת מן הטענות הבאות:
 - (א) קיימת קבוצה בת 3 איברים שהיא פונקציה.
 - (ב) קיימת פונקציה מקבוצה בת 5 איברים לקבוצה בת 2 איברים.
 - (ג) קיימות פונקציות f, g כך ש- $f \in g^{-1}$.
 - (ד) קיימות פונקציות f, g (לא ריקות) כך ש- $f = \text{dom}g$.
 - (ה) קיימות פונקציות $f \neq g$ עם $\text{dom}f = \text{dom}g$ וגם $\text{range}f = \text{range}g$.
 - (ו) קיימות פונקציות f, g עם $\text{range}f = \{g\}$ וגם $\text{range}g = \{f\}$.
 - (ז) קיימת פונקציה שתחומה הנו הקבוצה הריקה.
 - (ח) קיימת פונקציה שתחומה אינו הקבוצה הריקה אך טווחה (range) הנו הקבוצה הריקה.
 - (ט) קיימת פונקציה f עם $f \cap \text{dom}f \neq \emptyset$.
 - (י) קיימת פונקציה f עם $\text{dom}f \subsetneq \text{range}f$.
 - (יא) קיימת פונקציה מ- \mathbb{R} ל- \mathbb{R} שהנה סימטרית.
 - (יב) קיימת פונקציה מ- \mathbb{Q} ל- \mathbb{Q} שהנה אנטי-סימטרית חלשה.
 - (יג) קיימת פונקציה מ- \mathbb{N} ל- \mathbb{N} שהנה אנטי-סימטרית חזקה.
 - (יד) קיימת קבוצה x עבורה $\mathcal{P}(x)$ הנה פונקציה.
2. נסמן $x = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}$ מצאו כמה איברים יש בכל אחת מן הקבוצות הבאות, ורשמו איבר אחד לדוגמה:

(א) $\mathcal{P}(x)$	(ב) x^x	(ג) $\mathcal{P}(x^x)$	(ד) $(\mathcal{P}(x))^x$	(ה) $x^{\mathcal{P}(x)}$
----------------------	-----------	------------------------	--------------------------	--------------------------
3. יהיו f, g פונקציות מ- $\{1, 2, 3\}$ ל- $\{3, 5\}$.
 - (א) כמה איברים יש ב- f^{-1} לכל היותר? לכל הפחות?
 - (ב) כמה איברים יש ב- $\text{range}g$ לכל היותר? לכל הפחות?
 - (ג) כמה איברים יש ב- $\text{dom}f \cap \text{dom}g$ לכל היותר? לכל הפחות?
 - (ד) כמה איברים יש ב- f^g לכל היותר? לכל הפחות?
 - (ה) כמה איברים יש ב- $\{f\}^{\{g\}}$ לכל היותר? לכל הפחות?
 - (ו) כמה איברים יש ב- $(\text{dom}f)^{\text{range}g}$ לכל היותר? לכל הפחות?
4. הוכיחו כי פונקציה $f : x \rightarrow y$ הנה חח"ע ועל אם ורק אם היחס f^{-1} הנו פונקציה מ- y ל- x .
5. תהי $f : x \rightarrow y$ ותהי $z \subseteq y$.
 - (א) הוכיחו כי $f[f^{-1}[z]] \subseteq z$.
 - (ב) הניחו גם כי f הנה על. הוכיחו כי $f[f^{-1}[z]] = z$.
6. תהי x קבוצה, ויהיו $f, g \in x^x$. נתון כי $f \circ g$ הנה על וכי f הנה חח"ע. הוכיחו כי g על.