

מבוא לתורת הקבוצות – תרגיל 7

להגשה עד ליום ראשון ה-20 במאי 2012

1. מצאו פונקציית שקילות מפורשת בין הקבוצות $A = [2, 4) \setminus \{e, \pi\}$ ו- $B = [2, 4)$. יש לתאר את הפונקציה באופן מפורש – אין זה מספיק להוכיח קיומה של כזו.

2. יהי Π אוסף כלשהו של פולינומים ממעלה גדולה או שווה ל-2 כך ש- $|\Pi| = \aleph_0$, ויהי ℓ הישר $2x + 3y = 5$. הוכיחו כי קיימת נקודה $(x, y) \in \ell$ שלא נמצאת על גרף של אף פולינום מ- Π ; במילים אחרות, הראו כי קיימים $x, y \in \mathbb{R}$ המקיימים $2x + 3y = 5$ ושעבורם לא קיים $p \in \Pi$ כך ש- $p(x) = y$.

3. תהי $A \subseteq \mathbb{R}$ אינסופית. נניח כי קיימים $m, n \in \mathbb{Z}$ עבורם לכל $B \subseteq A$ סופית מתקיים

$$m < \sum_{b \in B} b < n$$

הוכיחו כי A בת מניה.

4. הוכיחו כי לכל שלוש קבוצות x, y, z מתקיים

$$|(x^y)^z| = |x^{y \times z}|$$

ומצאו דוגמה נגדית לשוויון

$$|x^{(y^z)}| = |x^{y \times z}|$$

5. בשאלה 2 בתרגיל 5 הוגדר היחס R מעל הקבוצה \mathbb{Q} .

(א) מהי עוצמת R ?

(ב) מהי עוצמת \mathbb{Q}/R ?

(ג) מהי עוצמת $[0]_R$?