מבוא לתורת הקבוצות - תרגיל 8

להגשה עד ליום ראשון ה־27 במאי 2012

1. נאמר על פונקציה $f \in y^x$ שהיא k־חד־ערכית אם לכל $b \in y$, $\left|f^{-1}\left[b\right]\right| \leq k$. שימו לב שפונקציה 1־חד־ערכית היא בעצם פונקציה חד־חד־ערכית. הוכיחו/הפריכו:
   (א) אם קיימת $f \in y^x$ שהיא k־חד־ערכית עבור k טבעי כלשהו, ו־y בת־מניה או מעוצמת הרצף, אז $|x| \leq |y|$.
   (ב) אם קיימת $f \in y^x$ שהיא k־חד־ערכית עבור k טבעי כלשהו, ו־y סופית, אז $|x| \leq |y|$.
   (ג) אם קיימת $f \in y^x$ שהיא $\aleph_0$־חד־ערכית, ו־y בת־מניה או מעוצמת הרצף, אז $|x| \leq |y|$.
2. חשבו את עוצמת כל הישרים במישור
   (א) העוברים בנקודה רציונלית כלשהי (נקודה ב־$\mathbb{Q}^2$)
   (ב) העוברים בזוג נקודות רציונליות (שונות)
   (ג) שאינם עוברים בנקודה רציונלית
   (ד) שאינם עוברים בנקודה בעלת קואורדינטה רציונלית (נקודה ב־$(\mathbb{Q} \times \mathbb{R}) \cup (\mathbb{R} \times \mathbb{Q})$)
3. נאמר על פונקציה $f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ שלוקח לה זמן להתניע אם קיים $k \in \mathbb{N}$ עבורו לכל $0 \leq i < j \leq k$ מתקיים $f(i) = f(j)$, ולכל $k \leq i < j$ מתקיים $f(i) \neq f(j)$. מהי עוצמת קבוצת כל הפונקציות שלוקח להן זמן להתניע?
4. נוסחה $\varphi(x)$ הנה ביטוי בשפת תורת הקבוצות (כולל הקיצורים המקובלים שלנו) שלו משתנה חופשי אחד (x) בדיוק, כלומר, משתנה אחד שאינו קשור לכמת כלשהו. לדוגמה, הביטוי

$$\varphi(x) = \text{"}\forall y \in \mathbb{R}\,(x > y)\text{"}$$

הנו נוסחה. הביטוי "$x > y$" אינו נוסחה, שכן יש בו שני משתנים חופשיים. שימו לב כי נוסחה אינה מקבלת ערך אמת (כי לא ברור מי זה x), אך אם מציבים ב־x ערך כלשהו, הנוסחה הופכת לפסוק ומקבלת ערך אמת כלשהו. למשל, אם נציב בנוסחה שניתנה כדוגמה, לעיל, את הערך 7 במקום x נקבל את הפסוק

$$\varphi(7) = \text{"}\forall y \in \mathbb{R}\,(7 > y)\text{"}$$

שהוא פסוק שקר. (למי שזה נוח לו לחשוב כך, אפשר להתייחס לנוסחאות כאל פונקציות לתוך אוסף כל הפסוקים)

נאמר על מספר ממשי r שהוא גדיר אם קיימת נוסחה $\varphi(x)$ המקיימת שני דברים במקביל: $\varphi(r)$ מקבל ערך אמת, ו־$\varphi(q)$ מקבל ערך שקר לכל $q \neq r$. כלומר, r הנו גדיר אם יש נוסחה שמגדירה אותו; במילים אחרות, נוסחה שרק הוא מקיים. לדוגמה, המספר 0 הנו גדיר, כפי שהנוסחה הבאה תעיד:

$$\varphi(x) = \text{"}\neg\exists y\,(y \in x)\text{"}$$

ובהנחה שהמספר הטבעי n הנו גדיר, גם המספר $n+1$ הנו גדיר (נסו לחשוב מדוע) ולכן כל הטבעיים גדירים. שימו לב שלגיטימי לרשום מספר בתוך נוסחה רק אם ידוע שהוא עצמו גדיר!

האם יש מספר לא רציונלי גדיר? האם יש מספר לא אלגברי גדיר? האם קיים ממשי שאינו גדיר?