מבוא לתורת הקבוצות - תרגיל 9

להגשה עד ליום רביעי ה־6 ביוני 2012

1. תהי x קבוצה סדורה היטב (לפי הסדר $\leq$), ותהי $f : x \to x$ פונקציה מונוטונית עולה (כלומר, לכל $a \leq b$ מתקיים $f(a) \leq f(b)$). הוכיחו כי לכל $a \in x$ מתקיים

$$a \leq f(a)$$

והראו דוגמה ל־x סדורה קווית שעבורה הטענה שלעיל אינה נכונה.

2. הציגו יחס סדר קווי $\preceq$ על $Q = \mathbb{Q} \cap (0,1)$ כך שהרישא של כל $q \in Q$ הנו סופי. כלומר, לכל q,

$$|\{x \in Q \mid x \prec q\}| < \aleph_0$$

3. יהיו $(a, \leq_a)$, $(b, \leq_b)$ קבוצות סדורות חלקית, ויהי $f : a \to b$ איזומורפיזם. הוכיחו כי:

   (א) אם ב־a אין איבר מקסימלי ($m \in a$ כך שלכל $x \geq_a m$, $x = m$) גם ב־b אין איבר מקסימלי.

   (ב) קיים איזומורפיזם $g : a \to b$ ביחס לסדרים $\geq_a$ ו־$\geq_b$. כלומר, הקבוצות הסדורות $(a, \geq_a)$ ו־$(b, \geq_b)$ איזומורפיות.

4. יהי $n < \omega$.

   (א) הציגו יחס סדר קווי $\preceq$ על ω כך שקיימת $x \subseteq \omega$ עם $|x| = n$ עבורה הרישא של כל $a \in x$ הנו סופי, והרישא של כל $a \in \omega \setminus x$ הנו אינסופי.

   (ב) הציגו יחס סדר קווי $\preceq$ על ω כך שקיימת $x \subseteq \omega$ עם $|x| = n$ עבורה הרישא של כל $a \in x$ הנו אינסופי, והרישא של כל $a \in \omega \setminus x$ הנו סופי.

   (ג) האם תוכלו למצוא $x \subseteq \omega$ עם $|x| = \aleph_0$ עבורה הרישא של כל $a \in x$ הנו אינסופי, והרישא של כל $a \in \omega \setminus x$ הנו סופי?

5. נגדיר $\preceq$ על $\omega \times \omega$ באופן הבא: $(x_1, y_1) \preceq (x_2, y_2)$ אם ורק אם מתקיים אחד מהשניים:

- $x_1 + y_1 = x_2 + y_2$ וגם $(x_1, y_1) \leq_L (x_2, y_2)$ (כאשר $\leq_L$ הנו הסדר הלקסיקוגרפי השמאלי על $\omega \times \omega$)
- $x_1 + y_1 < x_2 + y_2$

   (א) בדקו האם $\preceq$ הנו סדר קווי, ואם כן, האם הוא סדר טוב.

   (ב) נגדיר פונקציה $f : \omega \to \omega \times \omega$ באופן הבא: לכל $n < \omega$,

$$f(n) = \min_{\preceq} \left((\omega \times \omega) \setminus \bigcup_{i<n} \{f(i)\} \right)$$

   האם f חד חד ערכית? האם היא על? האם היא איזומורפיזם של סדרים?