

מבוא לתורת הקבוצות – תרגיל 1 – הערות

1. לכל n טבעי נסמן: $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$. לכל שני מספרים טבעיים m, n נסמן $m | n$ אם m מחלק את n ו- $n \nmid m$ אם m אינו מחלק את n . רשמו במפורש את איברי הקבוצות הבאות:

$$C_n = A_n \Delta B_n \quad B_n = \bigcap_{k \in [n]} [k] \quad A_n = \bigcup_{k \in [n]} \{k\}$$

$$E_n = \bigcup_{k \in [n]} D_k \quad D_n = A_n \setminus \{k : k | n\}$$

פתרונות מתקיים:

$$\begin{aligned} A_n &= [n] \bullet \\ B_n &= \{1\} \bullet \\ C_n &= \{2, 3, \dots, n\} \bullet \\ D_n &= \{k \in [n] : k \nmid n\} \bullet \\ E_n &= \{2, 3, \dots, n-2, n-1\} \bullet \end{aligned}$$

2. הוכיחו/הפריכו:

(א) לכל שלוש קבוצות A, B, C מתקיים $(A \cap B) \setminus C = A \Delta (C \setminus B)$

הפרכה נקח $A = \{1\}, B = C = \emptyset$.

(ב) לכל שתי קבוצות A, B מתקיים $A \subseteq \{A, B\}$

הפרכה נקח $A = \{1\}, B = \{2\}$. מתקיים $\{1\} \notin \{\{1\}, \{2\}\}$ (שכן $1 \notin \{\{1\}, \{2\}\}$).

(ג) לכל קבוצה A מתקיים $A \Delta \{A\} = \emptyset$

הפרכה נקח $A = \{1\}$. מתקיים: $\{1\} \Delta \{\{1\}\} = \{1, \{1\}\}$.

3. יהיו קבוצות A_1, \dots, A_n . נסמן:

$$\prod_{k \in [n]} A_k = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$$

הוכיחו כי $\prod_{k \in [n]} A_k \neq \emptyset$ אם ורק אם לכל $k \in [n]$ מתקיים $A_k \neq \emptyset$.

הוכחה ההוכחה באינדוקציה על n .

מקרה בסיס נקח $n = 2$. אז:

$$\prod_{k \in [2]} A_k = A_1 \times A_2$$

מצד אחד, אם A_1 או A_2 ריקות, אזי לא קיים (x, y) כך ש- $x \in A_1$ ו- $y \in A_2$, ולכן $A_1 \times A_2$ ריקה. מצד שני, אם A_1 ו- A_2 שתיהן אינן ריקות, קיים $a_1 \in A_1$ וקיים $a_2 \in A_2$ ולכן $(a_1, a_2) \in A_1 \times A_2$ וממילא $A_1 \times A_2$ אינה ריקה.

צעד נניח שהטענה נכונה עבור $n - 1 \geq 1$ טבעי כלשהו, ונוכיחה עבור n . מתקיים:

$$\prod_{k \in [n]} A_k = A_1 \times \dots \times A_{n-1} \times A_n = \left(\prod_{k \in [n-1]} A_k \right) \times A_n$$

זוהי מכפלה של שתי קבוצות, וכמו במקרה הבסיס היא ריקה אם ורק אם אחת משתי הקבוצות במכפלה ריקה. לכן, אם המכפלה ריקה, אזי A_n ריקה או $(\prod_{k \in [n-1]} A_k)$ ריקה, כאשר אם המקרה השני מתקיים אזי אחת (לפחות) מבין A_1, \dots, A_{n-1} הנה ריקה. מצד שני, אם אחת מבין A_1, \dots, A_n ריקה, אז A_n ריקה (ואז המכפלה ריקה) או ש- $(\prod_{k \in [n-1]} A_k)$ ריקה (ואז גם המכפלה ריקה).

4. * מצאו קבוצה $A \neq \emptyset$ המקיימת $A \times A \subseteq A$, או הוכיחו כי אין כזו.

הערה ראו שאלה ראשונה בתרגיל 2.