מבוא לתורת הקבוצות - תרגיל 10

לא להגשה

1. יהיו A, B קבוצות. הוכיחו/הפריכו:
   (א) אם $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \{\varnothing\}$ אז $A \cap B = \varnothing$.
   (ב) $\mathcal{P}(A \times B) = \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$
   (ג) $|\mathcal{P}(A \times B)| = |\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)|$
   (ד) אם $|B| \leq |A|$ וגם $|\mathcal{P}(B)| \leq |\mathcal{P}(A)|$ אז $|\mathcal{P}(A)| = |\mathcal{P}(B)|$.
   (ה) אם $|A| = n$ ($n \in \mathbb{N}$), $B \subseteq \mathcal{P}(A)$ ולכל $x, y \in B$ מתקיים $x \cap y \neq \varnothing$, אז $|B| \leq 2^{n-1}$.
2. הוכיחו כי $|\mathcal{P}(\mathbb{Z}) \setminus \mathcal{P}(\mathbb{N})| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$.
3. נביט ביחס $\subseteq$ מעל $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.
   (א) הוכיחו כי $\subseteq$ הנו יחס סדר חלקי, אך אינו יחס סדר מלא
   (ב) מצאו $A \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$ עם $|A| = \aleph_0$ עבורה $(A, \subseteq)$ הנה קבוצה סדורה קווית
   (ג) מצאו $B \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$ עם $|B| = 2^{\aleph_0}$ עבורה $(B, \subseteq)$ הנה קבוצה סדורה קווית
4. תהי A_0 קבוצה כלשהי. לכל $n \geq 1$ טבעי נגדיר $A_n = \mathcal{P}(A_{n-1})$. נגדיר גם $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.
   (א) האם $A = \mathcal{P}(A)$?
   (ב) נגדיר $g : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(A)$ באופן הבא: $g(n) = A_n$. הראו כי g מוגדרת היטב, בדקו האם היא חח"ע והאם היא על.
   (ג) נגדיר $f : A \to A$ באופן הבא: $f(x) = \mathcal{P}(x)$. הראו כי f מוגדרת היטב, בדקו האם היא חח"ע והאם היא על.
   (ד) נגדיר $A' = \bigcup_{n=2}^{\infty} A_n$, ונגדיר $f' : A \to A'$ באופן הבא: $f'(x) = f(x)$. בדקו האם f מוגדרת היטב, ואם כן, האם היא חח"ע והאם היא על.