מבוא לתורת הקבוצות – תרגיל 2 – הערות

1. מצאו פונקציה הפיכה (זיווג) בין $A \times B$ ל־$B \times A$.

פתרון הפונקציה $f : A \times B \to B \times A$ המוגדרת כך: $f((x,y)) = (y,x)$ הנה זיווג. ההוכחה לכך: $g : B \times A \to A \times B$ המוגדרת כך: $g((y,x)) = (x,y)$ הנה הפוכה לה (הרכבה משני הכיוונים מוכיחה זאת).

2. נגדיר $A_0 = \{\varnothing\}$, ולכל $n > 0$ טבעי, נגדיר $A_n = A_{n-1} \cup (A_{n-1} \times A_{n-1})$. נגדיר

$$A = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$$

הוכיחו כי $A \times A \subseteq A$. האם $A \times A = A$?

פתרון יהי $(x,y) \in A \times A$. אזי: $x, y \in A$. לכן, קיימים $m, n \in \mathbb{N}$ (בלי הגבלת הכלליות, $m \le n$) כך ש־$x \in A_m$ ו־$y \in A_n$. מאחר והסדרה A_k הנה מונוטונית עולה, $x, y \in A_n$. לכן: $(x,y) \in A_n \times A_n$ ולכן $(x,y) \in A_{n+1}$ וממילא $(x,y) \in A$, כפי שרצינו להוכיח.
נשים לב כי הכיוון השני של ההכלה לא מתקיים, שכן $\varnothing \in A$ אבל $\varnothing \notin A \times A$.

3. לכל מספר טבעי $n > 1$, נסמן את הפירוק היחיד שלו לראשוניים שונים באופן הבא:

$$n = p_1^{r_1} \cdot p_2^{r_2} \cdots p_k^{r_k}$$

ונגדיר

$$A_n = \begin{cases} \varnothing & n = 0 \\ \{1\} & n = 1 \\ \{1, p_1, \ldots, p_k, n\} & \text{otherwise} \end{cases}$$

מצאו את $\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n$, $\underline{\lim} A_n$, את $\overline{\lim} A_n$ ואת $\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$.

פתרון מתקיים

$$\begin{aligned} \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n &= \varnothing \\ \underline{\lim} A_n &= \{1\} \\ \overline{\lim} A_n &= \{p_1, p_2, p_3, \ldots\} \\ \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n &= \{1, 2, 3, \ldots\} \end{aligned}$$

4. תהי x_n סדרה מונוטונית עולה של קבוצות; כלומר, לכל $i < j$ מתקיים $x_i \subseteq x_j$. הוכיחו כי לסדרה x_n יש גבול, והוכיחו כי

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \bigcup_{n=0}^{\infty} x_n$$

פתרון יהי $a \in \overline{\lim} x_n$. אז: לכל $i \in \mathbb{N}$ קיים $j \geq i$ עבורו $a \in x_j$. בפרט, קיים j עבורו $a \in x_j$. מאחר והסדרה מונוטונית, לכל $k \geq j$ מתקיים $a \in x_k$. לכן $a \in \underline{\lim} x_n$ ולכן לסדרה יש גבול.
כמו־כן, יהי $a \in \bigcup_{n=0}^{\infty} x_n$. מאותם שיקולים $a \in \underline{\lim} x_n$, ולכן הגבול שווה ל־$\bigcup_{n=0}^{\infty} x_n$.

5. $\star$ יהיו A, B, C, D קבוצות עבורן $A \subseteq B \subseteq C \subseteq D$. האם בהכרח קיימת סדרת קבוצות x_n עבורה:

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} x_n = A \qquad \underline{\lim} x_n = B$$
$$\overline{\lim} x_n = C \qquad \bigcup_{n=0}^{\infty} x_n = D$$

פתרון כן. נגדיר:

$$x_n = \begin{cases} A & n = 0 \\ D & n = 1 \\ B & n > 1,\, 2 \mid n \\ C & n > 1,\, 2 \nmid n \end{cases}$$