מבוא לתורת הקבוצות – תרגיל 2

להגשה עד ליום רביעי, ה־21 בנובמבר 2012 **בשעה 13:00**

1. מצאו פונקציה הפיכה (זיווג) בין $A \times B$ ל־$B \times A$.

2. נגדיר $A_0 = \{\varnothing\}$, ולכל $n > 0$ טבעי, נגדיר $A_n = A_{n-1} \cup \left(A_{n-1} \times A_{n-1}\right)$. נגדיר

$$A = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$$

הוכיחו כי $A \times A \subseteq A$. האם $A \times A = A$?

3. לכל מספר טבעי $n > 1$, נסמן את הפירוק היחיד שלו לראשוניים שונים באופן הבא:

$$n = p_1^{r_1} \cdot p_2^{r_2} \cdots p_k^{r_k}$$

ונגדיר

$$A_n = \begin{cases} \varnothing & n = 0 \\ \{1\} & n = 1 \\ \{1, p_1, \ldots, p_k, n\} & \text{otherwise} \end{cases}$$

מצאו את $\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n$, את $\underline{\lim} A_n$ ואת $\overline{\lim} A_n$, $\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$.

4. תהי x_n סדרה <u>מונוטונית עולה</u> של קבוצות; כלומר, לכל $i < j$ מתקיים $x_i \subseteq x_j$. הוכיחו כי לסדרה x_n יש גבול, והוכיחו כי

$$\lim_{n \to \infty} x_n = \bigcup_{n=0}^{\infty} x_n$$

5. $\star$ יהיו A, B, C, D קבוצות עבורן $A \subseteq B \subseteq C \subseteq D$. האם בהכרח קיימת סדרת קבוצות x_n עבורה:

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} x_n = A \qquad \underline{\lim} x_n = B$$
$$\overline{\lim} x_n = C \qquad \bigcup_{n=0}^{\infty} x_n = D$$