מבוא לתורת הקבוצות – תרגיל 3

1. בדקו עבור כל אחת מן הקבוצות הבאות האם היא סופית, בת־מניה, או אינסופית שאינה בת־מניה:

(א) M – אוסף כל הסדרות ה**סופיות** של מספרים שלמים בין 0 ל־9 (כולל), כך שהאיבר הראשון בסדרה אינו 0. למשל, $(1,2,3)\in M$ אבל $(0,5,9,8)\notin M$ ו־$(12,3)\notin M$.

פתרון הקבוצה הנה בת־מניה. הזיווג הבא מוכיח זאת:

$$\begin{aligned} f: M &\to \mathbb{N} \\ f\left((a_0,a_1,a_2,\ldots,a_n)\right) &= a_n + a_{n-1}\cdot 10 + a_{n-2}\cdot 10^2 + \ldots + a_0\cdot 10^n \end{aligned}$$

(ב) L – אוסף כל הסדרות ה**אינסופיות** של מספרים שלמים בין 0 ל־9 (כולל) המסתיימות בסדרה אינסופית של אפסים. למשל, $(0,1,2,1,0,0,0,0,\ldots)\in L$ אבל $(0,1,0,1,0,1,0,1,\ldots)\notin L$ ו־$(10,0,0,\ldots)\notin L$.

פתרון הקבוצה הנה בת־מניה. בהנתן סדרה $(a_0,a_1,\ldots)\in L$, יהי n_0 האינדקס האחרון עבורו $a_{n_0}\neq 0$ (או $n_0=0$, אם אין כזה). נגדיר $g: L\to M$ באופן הבא:

$$g\left(a_0,a_1,\ldots\right) = \left(a_{n_0},a_{n_0-1},\ldots,a_0\right)$$

זהו זיווג, ומכיוון ש־M בת־מניה, גם L בת־מניה.

(ג) K – אוסף כל הסדרות ה**אינסופיות** של מספרים ראשוניים.

פתרון הקבוצה הנה אינסופית אך אינה בת־מניה. נניח בשלילה כי K בת־מניה או סופית. נסמן ב־Σ את אוסף הסדרות הבינאריות האינסופיות, ונגדיר $h:\Sigma\to K$ באופן הבא:

$$h\left((a_0,a_1,a_2,\ldots)\right) = (3-a_0, 3-a_1, 3-a_2,\ldots)$$

מאחר ו־h הנה זיווג, קיבלנו ש־Σ שקולה לתת־קבוצה של קבוצה בת־מניה, ולכן Σ הנה בת־מניה או סופית, בסתירה למה שהוכחנו בכיתה.

2. נביט בהוכחה הבאה לטענה (השגויה) "קבוצת הסדרות האינסופיות של מספרים טבעיים הנה בת־מניה":

> נמנה את המספרים הראשוניים כך: $p_1,p_2,\ldots$ (למשל, לפי הסדר הרגיל שלהם כקבוצה חלקית לטבעיים). כל מספר טבעי נקבע באופן יחיד על־פי פירוקו למספרים ראשוניים שונים: $n=p_{m_1}^{k_{m_1}}\cdots p_{m_r}^{k_{m_r}}$. תהי f פונקציה מהטבעיים לקבוצת הסדרות האינסופיות של מספרים טבעיים, המוגדרת כך: לכל n, $f(n)$ הנה סדרה, שבמקום ה־i מופיע בה הערך k_i, אם המספר הראשוני p_i מופיע בפירוק של n בחזקה k_i, ואחרת 0.
> נשים לב כי בהנתן סדרה אינסופית של מספרים טבעיים נוכל לשחזר את המספר הטבעי היחיד שנשלח אליה על ידי f (פשוט נבנה את n על פי המספרים הראשוניים והחזקות המתאימות, כפי שהן מופיעות בסדרה). על־כן, f הנה זיווג, ומכאן נובע שקבוצת הסדרות האינסופיות של מספרים טבעיים הנה בת־מניה.

היכן הטעות בהוכחה?

פתרון הטעות הנה בטענה ש־f הנה זיווג. מדוע היא אינה?

3. מצאו זיווג בין $\mathbb{R}$ ל־$\mathbb{R}\cup\{\alpha\}$, כאשר $\alpha\notin\mathbb{R}$.

פתרון נגדיר $f:\mathbb{R}\cup\{\alpha\}\to\mathbb{R}$ באופן הבא:

$$f(x)=\begin{cases}0 & x=\alpha\\ x+1 & x\in\mathbb{N}\\ x & \text{otherwise}\end{cases}$$

אזי: f הנה זיווג, מאחר והפונקציה $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\cup\{\alpha\}$ המוגדרת כך:

$$g(x)=\begin{cases}\alpha & x=0\\ x-1 & x\in\mathbb{N}^{+}\\ x & \text{otherwise}\end{cases}$$

הנה הופכית לה.

4. $\star$ מצאו זיווג בין קבוצת כל הישרים במישור לבין $\mathbb{R}$.

פתרון זיווג כזה יכול להיות מוצג כהרכבה של זיווגים. נסמן את קבוצת כל הישרים במישור ב־Λ, ונמצא את הזיווגים אחד־אחד:

- נמצא זיווג $f:\Lambda\to\mathbb{R}\times(\mathbb{R}\cup\{\infty\})$: לכל ישר $\ell\in\Lambda$ נסמן ב־$y(\ell)$ את נקודת החיתוך שלו עם ציר ה־y (אם יש כזו) וב־$m(\ell)$ את השיפוע שלו; אם אין לנו נקודת חיתוך עם ציר ה־y, נסמן $m(\ell)=\infty$ וב־$y(\ell)$ נסמן את נקודת החיתוך שלו עם ציר ה־x. נגדיר $f(\ell)=(y(\ell),m(\ell))$; אזי, f הנה זיווג (יש להראות זאת).
- נמצא זיווג $g:\mathbb{R}\times(\mathbb{R}\cup\{\infty\})\to\mathbb{R}\times\mathbb{R}$. בשאלה הקודמת מצאנו זיווג $\varphi:\mathbb{R}\to(\mathbb{R}\cup\{\infty\})$. אזי: $g((x,y))=\left(x,\varphi^{-1}(y)\right)$ הנה זיווג כדרוש (יש להראות זאת).
- נמצא זיווג $h:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to(0,1)\times(0,1)$. בכיתה ראינו זיווג $\psi:\mathbb{R}\to(0,1)$ (למשל, $\psi(x)=\frac{1}{\pi}\arctan x+\frac{1}{2}$). אזי: $h((x,y))=(\psi(x),\psi(y))$ הנה זיווג כדרוש.
- נמצא זיווג $i:(0,1)\times(0,1)\to(0,1)$. בכיתה ראינו זיווג $\rho:(0,1)\to\Sigma$, כאשר Σ הנה אוסף כל הסדרות הבינאריות (למעט הסדרה הקבועה 0 והסדרות המסתיימות ברצף אינסופי של 1־ים). בהנתן $\sigma_1,\sigma_2\in\Sigma$, נסמן ב־$s(\sigma_1,\sigma_2)$ את השרשור שלהן:

$$s(\sigma_1,\sigma_2)=\sigma_1(0)\,\sigma_2(0)\,\sigma_1(1)\,\sigma_2(1)\ldots$$

  שנמצא גם הוא ב־Σ, ונגדיר $i((x,y))=\rho^{-1}(s(\rho(x),\rho(y)))$. אזי: i הנה זיווג כדרוש (יש להראות זאת).
- לבסוף, $t=\psi^{-1}\circ i\circ h\circ g\circ f$ הנה פונקציה מ־Λ ל־$\mathbb{R}$ שהנה הרכבה של זיווגים, ועל־כן זיווג.