מבוא לתורת הקבוצות - תרגיל 3

להגשה עד ליום רביעי, ה־5 בדצמבר 2012 **בשעה 13:00**

1. בדקו עבור כל אחת מן הקבוצות הבאות האם היא סופית, בת־מניה, או אינסופית שאינה בת־מניה:

(א) M – אוסף כל הסדרות ה**סופיות** של מספרים שלמים בין 0 ל־9 (כולל), כך שהאיבר הראשון בסדרה אינו 0. למשל, $(1,2,3) \in M$ אבל $(0,5,9,8) \notin M$ ו־$(12,3) \notin M$.

(ב) L – אוסף כל הסדרות ה**אינסופיות** של מספרים שלמים בין 0 ל־9 (כולל) המסתיימות בסדרה אינסופית של אפסים. למשל, $(0,1,2,1,0,0,0,\ldots) \in L$ אבל $(0,1,0,1,0,1,0,1,\ldots) \notin L$ ו־$(10,0,0,\ldots) \notin L$.

(ג) K – אוסף כל הסדרות ה**אינסופיות** של מספרים ראשוניים.

2. נביט בהוכחה הבאה לטענה (השגויה) "קבוצת הסדרות האינסופיות של מספרים טבעיים הנה בת־מניה":

נמנה את המספרים הראשוניים כך: $p_1, p_2, \ldots$ (למשל, לפי הסדר הרגיל שלהם כקבוצה חלקית לטבעיים). כל מספר טבעי נקבע באופן יחיד על־פי פירוקו למספרים ראשוניים שונים: $n = p_{m_1}^{k_{m_1}} \cdots p_{m_r}^{k_{m_r}}$. תהי f פונקציה מהטבעיים לקבוצת הסדרות האינסופיות של מספרים טבעיים, המוגדרת כך: לכל n, $f(n)$ הנה סדרה, שבמקום ה־i מופיע בה הערך k_i, אם המספר הראשוני p_i מופיע בפירוק של n בחזקה k_i, ואחרת 0.

נשים לב כי בהנתן סדרה אינסופית של מספרים טבעיים נוכל לשחזר את המספר הטבעי היחיד שנשלח אליה על ידי f (פשוט נבנה את n על פי המספרים הראשוניים והחזקות המתאימות, כפי שהן מופיעות בסדרה). על־כן, f הנה זיווג, ומכאן נובע שקבוצת הסדרות האינסופיות של מספרים טבעיים הנה בת־מניה.

היכן הטעות בהוכחה?

3. מצאו זיווג בין $\mathbb{R}$ ל־$\mathbb{R} \cup \{\alpha\}$, כאשר $\alpha \notin \mathbb{R}$.

4. $\star$ מצאו זיווג בין קבוצת כל הישרים במישור לבין $\mathbb{R}$.