

מבוא לתורת הקבוצות – תרגיל 5

להגשה עד ליום שני ה-17 בדצמבר 2012

1. לכל $r \in \mathbb{R}$, יהי $x_r = (-\infty, r)$, ונסמן $X = \{x_r \mid r \in \mathbb{R}\}$. יהי D יחס שקילות כלשהו מעל X . נסמן ב- Σ את אוסף הסדרות האינסופיות של איברים מ- X שיש להן גבול ב- X . נגדיר את היחס L מעל אוסף הסדרות האינסופיות של איברים מ- X באופן הבא:

$$L^D = \{(\sigma, \tau) \in \Sigma \times \Sigma \mid (\lim \sigma, \lim \tau) \in D\}$$

הוכיחו כי L הנו יחס שקילות מעל Σ , ומצאו זיווג בין Σ/L ל- \mathbb{R} .

2. שאלה זו דנה בישר הפרוייקטיבי הממשי.

תזכורת הגדרנו את היחס P מעל $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ באופן הבא:

$$P = \{((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \mid \exists \lambda \in \mathbb{R} : x_2 = \lambda x_1, y_2 = \lambda y_1\}$$

והגדרנו

$$\mathbb{R}P^1 = (\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}) / P$$

ולבסוף הגדרנו את הפעולה \oplus על $\mathbb{R}P^1$ באופן הבא:

$$[(x_1, y_1)] \oplus [(x_2, y_2)] = \begin{cases} \left[\left(1, \frac{y_1}{x_1} + \frac{y_2}{x_2} \right) \right] & x_1, x_2 \neq 0 \\ [(0, 1)] & \text{one (and only one) of } x_1, x_2 \text{ is } 0 \\ \text{undefined} & \text{otherwise} \end{cases}$$

(א) הוכיחו כי P הנו אכן יחס שקילות.

(ב) השלימו את ההוכחה שניתנה בכיתה לפיה הפעולה \oplus אינה תלויה בבחירת הנציגים.

(ג) נסמן $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. נרחיב את הפעולה $+$ על $\bar{\mathbb{R}}$ באופן הבא:

$$r + \infty = \infty + r = \infty$$

ונשאר את $\infty + \infty$ לא מוגדר. נגדיר פונקציה $\varphi : \mathbb{R}P^1 \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ באופן הבא:

$$\varphi([(x, y)]) = \begin{cases} y/x & x \neq 0 \\ \infty & \text{otherwise} \end{cases}$$

i. הוכיחו כי φ מוגדרת היטב. כלומר, הראו כי לכל $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, $\varphi([(x, y)]) \in \bar{\mathbb{R}}$

וכי לכל $(x, y), (x', y') \in P$, $\varphi([(x, y)]) = \varphi([(x', y')])$.

ii. הוכיחו כי φ הנה הפיכה. הסיקו כי עוצמת הישר הפרוייקטיבי הממשי זהה לעוצמת הישר הממשי.

iii. כאשר "מזהים" את $\mathbb{R}P^1$ עם $\bar{\mathbb{R}}$ בעזרת φ , מהי המשמעות של הפעולה \oplus מעל $\bar{\mathbb{R}}$?