

## מבוא לתורת הקבוצות – תרגיל 6

להגשה עד ליום שני ה-24 בדצמבר 2012

1. תהי  $X$  קבוצה כלשהי. נסמן ב- $\mathcal{O}$  את קבוצת כל הסדרים החלקיים מעל  $X$ , ונסמן ב- $\mathcal{S}$  את קבוצת כל הסדרים החלקיים החזקים מעל  $X$ . מצאו זיווג בין  $\mathcal{O}$  ל- $\mathcal{S}$ .
2. תרגיל נניח כי  $(a, \leq_a)$  ו- $(b, \leq_b)$  הן קבוצות סדורות קוויות. הוכיחו כי  $\leq_L$  (הסדר הלסקיגורפי השמאלי, כפי שהוגדר בתרגול) הנו סדר קווי על  $a \times b$ . מותר להיעזר במה שכבר הוכחנו בכיתה.
3. שאלה זו דנה במטריקות.

**הגדרה** תהי  $X$  קבוצה כלשהי. פונקציה  $d : X \times X \rightarrow [0, \infty)$  תקרא מטריקה אם היא מקיימת את 3 התכונות הבאות לכל  $x, y, z \in X$ :

$$\text{(א) } d(x, y) = 0 \text{ אם ורק אם } x = y$$

$$\text{(ב) } d(x, y) = d(y, x)$$

$$\text{(ג) } d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$$

כמו-כן, פונקציה  $d : X \times X \rightarrow [0, \infty)$  תקרא פסודו-מטריקה אם היא מקיימת את 3 התכונות הנ"ל, כאשר במקום תכונה א נדרשת התכונה:

$$\text{(א') } d(x, x) = 0$$

(א) תהי  $X$  קבוצה ותהי  $d' : X \times X \rightarrow [0, \infty)$  פסודו-מטריקה. נגדיר את היחס  $\sim$  מעל  $X$  באופן הבא:  $\sim = \{(x, y) \in X \times X \mid d'(x, y) = 0\}$ . הוכיחו כי  $\sim$  הנו יחס שקילות.

(ב) נסמן  $\sim Y = X / \sim$ . נגדיר  $d : Y \times Y \rightarrow [0, \infty)$  באופן הבא:  $d([x], [y]) = d'(x, y)$ . הוכיחו כי  $d$  הנה מטריקה. בפרט, הראו כי  $d$  מוגדרת היטב.

(ג) יהי  $x_0 \in X$  כלשהו. נגדיר  $n : X \rightarrow [0, \infty)$  באופן הבא:  $n(x) = d'(x, x_0)$ . נגדיר גם:

$$\leq = \{(x, y) \in X \times X \mid n(x) \leq n(y)\}$$

הוכיחו כי  $\leq$  הנו קדם-סדר מעל  $X$ .

(ד) נגדיר  $N : Y \rightarrow [0, \infty)$  באופן הבא:  $N([x]) = n(x)$ . הוכיחו כי  $N$  מוגדרת היטב.

(ה) נגדיר

$$\leq = \{([x], [y]) \in Y \times Y \mid N([x]) \leq N([y])\}$$

הוכיחו כי  $\leq$  הנו יחס סדר קווי מעל  $Y$ .