מבוא לתורת הקבוצות - תרגיל 8

להגשה עד ליום רביעי ה־9 בינואר 2012

1. יהיו A,B,C קבוצות כלשהן, $B\cap C=\varnothing$. הוכיחו כי

$$\left|A^B\times A^c\right|=\left|A^{B\cup C}\right|$$

ומצאו שלוש קבוצות X,Y,Z עבורן

$$\left|X^Y\times X^Z\right|\neq\left|X^{Y\cup Z}\right|$$

2. <u>סדרה טבעית עולה</u> הנה פונקציה $\sigma:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ עבורה לכל $m<n$ טבעיים, $\sigma\left(m\right)\leq\sigma\left(n\right)$. <u>סדרה טבעית עולה־ממש</u> הנה פונקציה $\sigma:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ עבורה לכל $m<n$ טבעיים, $\sigma\left(m\right)<\sigma\left(n\right)$. נסמן ב־$\mathcal{M}$ את קבוצת הסדרות הטבעיות העולות, וב־$\mathcal{M}^+$ את קבוצת הסדרות הטבעיות העולות־ממש.
   (א) מצאו זיווג בין $\mathcal{M}$ ל־$\mathcal{M}^+$.
   (ב) מצאו זיווג בין $\mathcal{M}^+$ ל־$\mathbb{N}^\mathbb{N}$.

3. תהי A קבוצה בת־מניה זרה ל־$\mathbb{R}$. מצאו זיווג בין $\mathbb{R}$ ל־$A\cup\mathbb{R}$. הסיקו כי $\aleph_0+2^{\aleph_0}=2^{\aleph_0}$.

4. תהי A קבוצה סופית כלשהי, ויהי $\sim$ יחס שקילות מעליה.
   (א) נניח כי קיים k טבעי עבורו לכל $a\in A$, $\left|[a]\right|=k$. הוכיחו כי $|A|=k\cdot|A/\sim|$.
   (ב) אם A קבוצה בת־מניה, האם הטענה מהסעיף הקודם עדיין נכונה?