

מבוא לתורת הקבוצות – תרגיל 9



להגשה עד ליום רביעי ה-16 בינואר 2012

1. לכל סדרה בינארית σ נגדיר את $O_\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ואת $Z_\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ באופן הבא:

$$\begin{aligned} O_\sigma(n) &= |\{k \in \{0, \dots, n-1\} : \sigma(k) = 1\}| \\ Z_\sigma(n) &= |\{k \in \{0, \dots, n-1\} : \sigma(k) = 0\}| \end{aligned}$$

חשבו את עוצמת כל אחת מבין הקבוצות הבאות:

- B_{010} – קבוצת כל הסדרות הבינאריות שאינן מכילות את הרצף 010
- B_h – קבוצת כל הסדרות הבינאריות σ , עבורן לכל n טבעי מתקיים $O_\sigma(n) \geq \frac{1}{2}Z_\sigma(n)$

2. נגדיר את היחס \sim על $\mathbb{N}^{\mathbb{Z}}$ באופן הבא:

$$\sim = \{(f, g) \mid \exists a, b \in \mathbb{Z}, \forall x < a, \forall y > b, (f(x) = g(x))\}$$

ונגדיר $h : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$ באופן הבא: $h(z) = |z|$. הוכיחו כי \sim הנו יחס שקילות, חשבו את $|\mathbb{N}^{\mathbb{Z}}/\sim|$ וחשבו את $|\mathbb{N}^{\mathbb{Z}}/\sim|$.

3. לכל קבוצה X , נאמר על פונקציה $f : X \rightarrow X$ שהיא בעלת נקודת שבת אם קיים $x \in X$ עבורו $f(x) = x$. לכל קבוצה X , נסמן ב- $\text{NFP}(X)$ את קבוצת כל הפונקציות ב- X^X שאין להן נקודת שבת. למשל, הפונקציה $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ המוגדרת $f(n) = n + 1$ הנה ב- $\text{NFP}(\mathbb{N})$.

היו X, Y קבוצות המקיימות $|X| = |Y|$. הוכיחו כי $|\text{NFP}(X)| = |\text{NFP}(Y)|$.

4. כזכור, לכל שתי קבוצות X, Y , הקבוצה $\mathcal{B}(X, Y)$ הנה קבוצת כל הזיווגים מ- X ל- Y . כמו כן, לכל קבוצה X הגדרנו $|X|! = |\mathcal{B}(X, X)|$. הוכיחו כי $|\mathbb{N}|! = |\mathbb{N}^{\mathbb{N}}|$.

5. בדרום אפגניסטן שוכנת ביצת צפרדעים הידועה בשם "זדשתיים". הביצה הנה אינסופית לאורכה ולרוחבה, יש בה עלה אחד המכונה "ראשית", ולכל עלה בביצה יש 4 עלים "שכנים", אחד שנמצא מטר אחד מצפון לו, אחד שנמצא מטר אחד ממערב לו, אחד שנמצא מטר אחד מדרום לו ואחד שנמצא מטר אחד ממזרח לו.

(א) (שאלה חשובה) בשנייה 0 צפרדע נמצאת על עלה אחד לא ידוע (נסמנו ב- (m_x, m_y)), ובכל שנייה הצפרדע קופצת לעלה שנמצא d_x מטרים מזרחה ו- d_y מטרים צפונה ממקומה באותו רגע. האם תוכלו לכתוב אלגוריתם שמאיר בכל שנייה (כולל שנייה 0) על עלה אחד בביצה, ויוכל להאיר על הצפרדע **בוודאות** בתוך זמן סופי?

(ב) * על נהר סמוך הידוע בשם "זדאחת", שהנו אינסופי מערבה ומזרחה, יש עלה אחד המכונה "אפס", ולכל עלה בנהר יש 2 עלים "שכנים", אחד שנמצא מטר אחד ממזרח לו ואחד שנמצא מטר אחד ממערב לו. בשנייה 0 צפרדע נמצאת על עלה אחד לא ידוע (נסמנו ב- m), ובכל שנייה הצפרדע קופצת לעלה שנמצא מטר אחד מזרחה או מטר אחד מערבה ממקומה באותו רגע. האם תוכלו לכתוב אלגוריתם שמאיר בכל שנייה (כולל שנייה 0) על עלה אחד בביצה, ויוכל להאיר על הצפרדע **בוודאות** בתוך זמן סופי?

(ג) ** צבעו את הצפרדע שבראש העמוד בצבעים מרהיבים.