

מבחן בתורת המספרים לתלמידי פרופ' זאב רודניק

סמסטר א' תשע"ב מועד א' 15.2.2011

הוראות: משך הבחינה 3 שעות
יש לענות על כל השאלות
אין להשתמש בחומר עזר
ניתן להשתמש במחשבון.

1. הראו שאם $N > 0$ שלם המקיים $N \equiv 7 \pmod{8}$ אזי N אינו סכום של 3 ריבועים:
$$N \neq x^2 + y^2 + z^2$$

2. (א) מצאו את כל פתרונות השלמים של המשוואה $10x + 6y = 28$.
(ב) כמה פתרונות חיוביים יש? כלומר המקיימים שגם $x > 0$ וגם $y > 0$.

3. יהא $p > 3$ ראשוני. הראו ש 9 אינו יכול להיות שורש פרימיטיבי מודולו p .

4. יהא p ראשוני, $p \equiv 1 \pmod{4}$. הראו שיש פתרון למשוואה $x^2 \equiv -1 \pmod{p^2}$.

5. יהיה $N = pq$ כאשר p, q ראשוניים אי-זוגיים שונים. הראו שקיים הפיך A מודולו N עבורו מתקיים: $A^{\frac{n-1}{2}} \not\equiv \left(\frac{A}{N}\right) \pmod{N}$. כאן $\left(\frac{A}{N}\right)$ הוא סימן יעקובי.

6. מצאו את כל ההפיכים בחוג $\mathbb{Z}[\sqrt{102}] = \{m + n\sqrt{102} : m, n \in \mathbb{Z}\}$

7. יהא \mathbb{F}_q שדה סופי עם q איברים. פונקצית זיטא של חוג הפולינומים $\mathbb{F}_q[x]$ מוגדרת

$$Z(T) := \sum_{0 \neq f \in \mathbb{F}_q[x]} T^{\deg f} \quad \text{ע"י}$$

כאשר $|T| < 1/q$ והסכום הוא על כל הפולינומים המתוקנים. הראו כי $Z(T) = \frac{1}{1-qT}$.

בהצלחה !

כל הזכויות שמורות ©

מבלי לפגוע באמור לעיל, אין להעתיק, לצלם, להקליט, לשדר, לאחסן במאגר מידע, בכל דרך שהיא, בין מכנית ובין אלקטרונית או בכל דרך אחרת כל חלק שהוא מטופס הבחינה.