פתרונות לתרגיל 10

$$Li = \int_2^x \frac{dt}{\ln x} \qquad (1)$$

(נפתור עבור $\ln x$ כיוון ש-$\log$ בכל בסיס אחר לא ישנה את ה-O בגדול, רק יוסיף קבועים (לבלוע אותם).

$$Li(x) = \int_2^x \frac{dt}{\ln t} = \frac{x}{\ln x} - \int_2^x -\frac{t}{t\ln^2 t}\,dt = \frac{x}{\ln x} + \int_2^x \frac{dt}{\ln^2 t} =$$

אינט' בחלקים:

$$g = \frac{1}{\ln t} \qquad g' = -\frac{1}{t\ln^2 t}$$
$$f' = 1 \qquad f = t$$

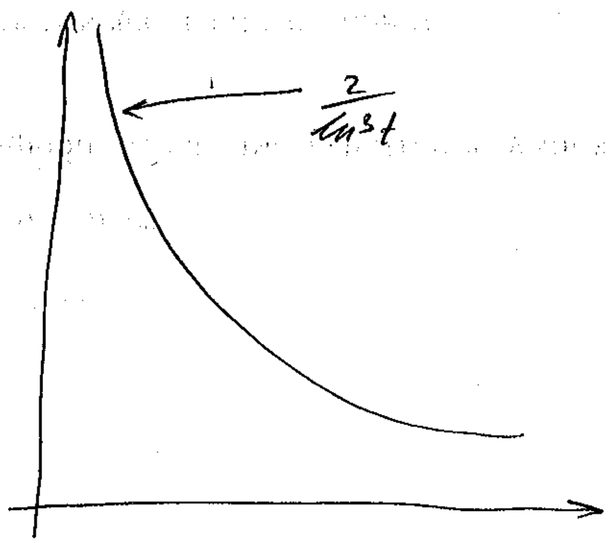
$$= \frac{x}{\ln x} + \frac{x}{\ln^2 x} + \int_2^x \frac{2}{\ln^3 t}\,dt$$

שוב, אינט' בחלקים:

$$g = \frac{1}{\ln^2 t} \qquad g' = -\frac{2}{t\ln^3 t}$$
$$f' = 1 \qquad f = t$$

נשאר להראות ש- $\int_2^x \frac{2}{\ln^3 t}\,dt = O\left(\frac{x}{\ln^3 x}\right)$

נראה זאת, אך קודם, נשים לב:



ציור

המשך שאלה 1

המשך שלב 1:

$$\int_2^x \frac{2}{\ln^3 t}\,dt = \int_2^{\sqrt{x}} \frac{2\,dt}{\ln^3 t} + \int_{\sqrt{x}}^x \frac{2\,dt}{\ln^3 t} \le$$

לפי הציור, $2<\sqrt{x}<x$

$$\le (\sqrt{x}-2)\cdot\frac{2}{\ln^3 2} + (x-\sqrt{x})\cdot\frac{2}{\ln^3\sqrt{x}} \le$$

$$\le \underset{\text{קבוע}}{c'}\sqrt{x} + \underset{\text{קבוע}}{c}\cdot\frac{x}{\ln^3\sqrt{x}} = O\left(\frac{x}{\ln^3 x}\right)$$

$$Li(x) = \frac{x}{\ln x} + \frac{x}{\ln^2 x} + O\left(\frac{x}{\ln^3 x}\right)$$

פתרון לתרגיל 10

2

מספיק להראות ש $\lim_{x\to\infty}\{\pi(2x)-\pi(x)\}=\infty$

$$\pi(x)=Li(x)+O\left(\frac{x}{\log^2 x}\right)$$

$$=\frac{x}{\log x}+O\left(\frac{x}{\log^2 x}\right)$$

(כיוון ש $Li(x)=\frac{x}{\log x}+O\left(\frac{x}{\log^2 x}\right)$).

גם

$$\pi(2x)=Li(2x)+O\left(\frac{x}{\log^2 x}\right)$$

באמד השגיאות אין חשיבות להבדל בין x ל-$2x$.

לכן

$$\pi(2x)-\pi(x)=Li(2x)-Li(x)+O\left(\frac{x}{\log^2 x}\right)$$

$$=\int_x^{2x}\frac{1}{\log t}\,dt+O\left(\frac{x}{\log^2 x}\right)$$

כי $\frac{1}{\log t}$ מונוטונית יורדת ולכן את האינטגרל

ניתן להעריך מלמטה ע"י:

$$\int_x^{2x}\frac{1}{\log t}\,dt>\int_x^{2x}\frac{1}{\log x}\,dt=\frac{x}{\log x}$$

לכן

$$\frac{\pi(2x)-\pi(x)}{x/\log x}\geq 1+O\left(\frac{1}{\log x}\right)$$

כנדרש.

$$\Lambda(n) := \begin{cases} \log p & n=p^k \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{c} p\text{-ראשוני} \\ k>0 \end{array}\right)$$

3

טענה:

$$\sum_{d|n} \Lambda(d) = \log n$$

הוכחה: יהי $n=\prod_{i=1}^{n} p_i^{k_i}$ פירוק לראשוניים של n כך ש $p_i \neq p_j$ אם $i \neq j$

אזי:

$$\sum_{d|n} \Lambda(d) \underset{\substack{\uparrow \\ p_i \text{ ראשוני} \\ k_i>0}}{=} \underbrace{0+0+\dots+0}_{\text{לכל } d|n \text{ שלא חזקה של ראשוני}} + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{k_i} \log(p_i^{j}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{k_i} j \log(p_i) = \sum_{i=1}^{m} \log(p_i^{k_i}) = \log n$$

(4) יהי $N=pq$ כאשר p,q - ראשוניים.

הראה: אם N, $\varphi(N)$ ידועים

אפשר למצוא ביעילות את p ואת q.

הוכחה:

$$\varphi(N) \underset{\gcd(p,q)=1}{=} \varphi(p)\varphi(q) \underset{p,q \text{ ראשוניים}}{=} (p-1)(q-1) = \underbrace{pq}_{N} - p - q + 1 = N - p - q + 1$$

$$\Leftarrow \quad \varphi(N) = N - p - q + 1$$

$$\Leftarrow \quad p + q = -\varphi(N) + N + 1$$

נשים לב שפתרונות המשוואה:

$$(x-p)(x-q) = x^2 + x(-p-q) + pq = x^2 + x(\varphi(N) - N - 1) + N$$

הם בדיוק p, q.

לכן נותר ~~[illegible]~~ למצוא את השורשים של המשוואה הריבועית הנ"ל, ונקבל את p,q.